МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СОГЛАСОВАНО

Руководитель образовательной программы __________ М.М. Лафишева

«12» 04 2023г.

УТВЕРЖДАЮ

Директор института __________ Б.И. Кунижев

«12» 04 2023г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии
(код и наименование направления подготовки)

«Проектирование систем искусственного интеллекта»
(наименование профиля подготовки)

Бакалавр
Квалификация (степень) выпускника

Очная
Форма обучения

Нальчик – 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень компетенций и этапы их формирования

Результаты обучения (компетенции)	Индикаторы достижения компетенции	Основные показатели оценки результатов обучения	Вид оценочного материала, обеспечивающие формирование компетенций
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	**ОПК-1.1.** Способен применять базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук	**ОПК-1.1.** З-1. Знает основные понятия, факты, концепции, принципы теорий математических и (или) естественных; базовый математический аппарат, связанный с прикладной математикой и информатикой **ОПК-1.1.** У-1. Умеет применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности к решению конкретных задач **ОПК-1.1.** В-1. Владеет навыками решения задач в профессиональной деятельности на основе фундаментальных знаний, полученных в области математических и (или) естественных наук	Типовые оценочные материалы для устного опроса *(раздел 5.1.1)* Типовые оценочные материалы для самостоятельной работы обучающегося *(раздел 5.1.2)* Типовые оценочные материалы для контрольной работы *(раздел 5.2.1)* Типовые тестовые задания *(раздел 5.2.2.)* Типовые оценочные материалы для промежуточной аттестации *(раздел 5.3.)*
	ОПК-1.2. Способен использовать при решении профессиональных задач знания, полученные в области математических и (или) естественных наук	**ОПК-1.2.** З-1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук **ОПК-1.2.** У-1. Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности. **ОПК-1.2.** В-1. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе полученных теоретических знаний	

2. Показатели и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Первый этап (уровень)	Второй этап (уровень)	Третий этап (уровень)
36-50 баллов	***51-60 баллов***	***61-70 баллов***
На данном уровне обучающийся запоминает и воспроизводит изученный материал. Студент: знает (запоминает и воспроизводит) употребляемые термины; знает конкретные факты; знает методы и процедуры; знает основные понятия; знает правила и принципы.	На данном этапе обучающийся понимает значение изученного материала, может преобразовать материал из одной формы выражения в другую. В качестве показателя понимания может также выступать интерпретация материала студентом (объяснение, краткое изложение) или же предположение о дальнейшем ходе явлений, событий (предсказание последствий, результатов). Обучающийся: понимает факты, правила и принципы; интерпретирует словесный материал, схемы, графики, диаграммы; преобразует словесный материал в математические выражения; предположительно описывает будущие последствия, вытекающие из имеющихся данных.	Этот уровень обозначает умение использовать изученный материал в конкретных условиях и в новых ситуациях. Сюда входят применение правил, методов, понятий, законов, принципов, теорий. Соответствующие результаты обучения требуют более высокого уровня владения материалом, чем понимание. Студент: использует понятия и принципы в новых ситуациях; применяет законы, теории в конкретных практических ситуациях; демонстрирует правильное применение метода или процедуры.

3. Критерии формирования оценок на различных этапах их формирования

Распределение баллов текущего и рубежного контроля

Вид работы	**Трудоемкость часов / зачетных единиц**			
	2 семестр	**3 семестр**	**4 семестр**	**Всего**
Общая трудоемкость (в часах)	**108**	**108**	**108**	**324**
Контактная работа (в часах)	**54**	**51**	**32**	**137**
Лекционные занятия (Л)	18	17	16	51
Практические занятия (ПЗ)	36	34	16	86
Семинарские занятия (СЗ)	-	-	-	-
Лабораторные работы (ЛР)	-	-	-	-
Самостоятельная работа (в часах), в том числе контактная работа (вне аудиторная):	**45**	**48**	**49**	**142**

Расчетно-графическое задание	-	-	-	-
Реферат (Р)	-	-	-	-
Эссе (Э)	-	-	-	-
Контрольная работа (КР)	-	-	-	-
Самостоятельное изучение разделов	45	48	49	142
Курсовой проект (КП), курсовая работа (КР)	-	-	-	-
Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	9	9	27	45
Вид промежуточной аттестации	**зачет**	**зачет**	**экзамен**	**экзамен, зачет**

Промежуточная аттестация (зачёт)

Семестр	**Шкала оценивания**	
	Незачтено (36-60)	**Зачтено (61-70)**
2, 3	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачёте не ответил ни на один вопрос.	Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете представил полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на оба вопроса. Студенту, имеющему 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, выставляется отметка «зачтено» без сдачи зачёта.

Промежуточная аттестация (экзамен)

Семестр	**Шкала оценивания**			
	Неудовлетворительно (36-60 баллов)	**Удовлетворительно (61-80 баллов)**	**Хорошо (81-90 баллов)**	**Отлично (91-100 баллов)**
4	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене не дал полного ответа ни на один вопрос. Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на	Студент имеет 36-50 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля,	Студент имеет 51-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 61 – 65 баллов по	Студент имеет 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй.

	экзамене дал полный ответ только на один вопрос.	на экзамене дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на все вопросы. Студент имеет по итогам текущего и рубежного контроля 61-70 баллов на экзамене не дал полного ответа ни на один вопрос.	итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично ответил на второй. Студент имеет 66-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ только на один вопрос.	

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов освоения образовательной программы

Перечень оценочных средств

№	**Наименование оценочного средства**	**Краткая характеристика оценочного средства**	**Представление оценочного средства в фонде**
1.	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2.	Задача (практическое задание)	Средство оценки умения применять полученные теоретические знания в практической ситуации. Задача (задание) должна быть направлена на оценивание тех компетенций, которые подлежат освоению в данной дисциплине, должна содержать четкую инструкцию по выполнению или алгоритм действий.	Комплект задач и заданий
3.	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам
4.	Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Фонд тестовых заданий

5	Курсовая работа	Продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной темы	Темы курсовых работ

Перечень вопросов для проведения коллоквиума по темам дисциплины

Вопросы по темам дисциплины «Математический анализ», (контролируемая компетенция ОПК-1)

СЕМЕСТР №1

Тема 1. Введение в математический анализ.

1. Множество действительных чисел. Аксиоматика.
2. Верхние и нижние грани. Система вложенных отрезков.
3. Связь между различными принципами непрерывности.
4. Счетные и несчетные множества.

Тема 2. Предел последовательности.

1. Определение предела последовательности. Свойства пределов.
2. Предел монотонной последовательности. Число e.
3. Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
4. Критерий Коши. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями.

Тема 3. Предел функции.

1. Понятие функции. Элементарные функции и их классификация.
2. Понятие предела функции. Свойства пределов. Критерий Коши.
3. Односторонние пределы.
4. Пределы монотонных функций.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение функций.

Тема 4. Непрерывные функции.

1. Непрерывность функции в точке.
2. Предел и непрерывность сложной функции.
3. Односторонняя непрерывность и точки разрыва.
4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
5. Обратные функции.
6. Показательная функция. Логарифмическая и степенная функция.
7. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.
8. Некоторые замечательные пределы.

Тема 5. Производные и дифференциалы.

1. Производная.
2. Дифференциал.
3. Геометрический смысл производной и дифференциала.

4. Производная обратной функции.
5. Производная сложной функции.
6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Тема 6. Свойства дифференцируемых функций.
1. Теорема о среднем.
2. Формула Тейлора.
3. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя.

Тема 7. Исследование поведения функций.
1. Монотонность и экстремумы функции.
2. Выпуклость и точки перегиба.
3. Асимптоты.
4. Построение графика функции.

СЕМЕСТР №2

Тема 1. Неопределённый интеграл.
1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Методы интегрирования.
3. Комплексные числа.
4. Разложение многочлена на множители. Разложение правильных рациональных дробей на простейшие.
5. Интегрирование рациональных дробей.
6. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Тема 2. Определенный интеграл.
1. Определенный интеграл. Критерий интегрируемости. Свойства интегрируемых функций.
2. Связь между определенным и неопределенным интегралами.
3. Замена переменной и интегрирование по частям.
4. Приложения определенного интеграла.
5. Несобственные интегралы.
6. Приближение интегрируемых функций ступенчатыми и непрерывными.

Тема 3. Функции многих переменных.
1. Многомерные евклидовы пространства. Открытые и замкнутые множества.
2. Предел функции многих переменных.
3. Функции, непрерывные в точке. Функции, непрерывные на множестве.

Тема 4. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.
1. Частные производные и дифференцируемость функций многих переменных.
2. Геометрический смысл дифференциала функции и частных производных.
3. Дифференцируемость сложной функции.
4. Производная по направлению и градиент.
5. Частные производные высших порядков.
6. Формула Тейлора.

Тема 5. Неявные функции.
1. Неявные функции, определяемые одним уравнением.
2. Система неявных функций.
3. Дифференцируемые отображения.

Тема 6. Экстремумы функций многих переменных.
1. Локальный экстремум.
2. Условный экстремум.

СЕМЕСТР №3

Тема 1. Числовые ряды.
1. Сходимость числового ряда.
2. Числовые ряды с неотрицательными членами.
3. Абсолютно сходящиеся ряды. Сходящиеся знакопеременные ряды.
4. Последовательности и ряды с комплексными членами.

Тема 2. Функциональные последовательности и ряды.
1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.
2. Признаки равномерной сходимости рядов.
3. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

Тема 3. Степенные ряды.
1. Свойства степенных рядов. Аналитические функции.
2. Разложение функции в ряд Тейлора.
3. Функции $e^z, \sin z, \cos z$ комплексного переменного.

Тема 4. Кратные интегралы.
1. Определение кратного интеграла и критерий интегрируемости.
2. Свойства кратного интеграла.
3. Сведение кратного интеграла к повторному.
4. Геометрический смысл модуля якобиана отображения.
5. Замена переменных в кратном интеграле.
6. Интегралы, зависящие от параметра.

Тема 5. Криволинейный интеграл.
1. Криволинейный интеграл первого рода.
2. Криволинейный интеграл второго рода.
3. Формула Грина.
4. Геометрический смысл знака якобиана плоского отображения.
5. Потенциальные векторные поля.

СЕМЕСТР №4

Тема 1. Элементы теории поверхностей.
1. Гладкие поверхности. Касательная плоскость и нормальная прямая.

2. Преобразование параметров гладкой поверхности.
3. Ориентация гладкой поверхности.
4. Первая квадратичная форма гладкой поверхности.
5. Неявно заданные гладкие поверхности.
6. Кусочно гладкие поверхности.

Тема 2. Поверхностные интегралы.
1. Поверхностные интегралы первого рода.
2. Поверхностные интегралы второго рода.

Тема 3. Скалярные и векторные поля.
1. Скалярные и векторные поля. Формула Остроградского-Гаусса.
2. Формула Стокса.
3. Потенциальные векторные поля.

Тема 4. Тригонометрические ряды Фурье.
1. Определение ряда Фурье и принцип локализации.
2. Сходимость ряда Фурье.
3. Приближение непрерывных функций многочленами.
4. Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов.
5. Скорость стремления к нулю коэффициентов и остатка ряда Фурье.
6. Ряды Фурье $2l$ -периодических функций.
7. Комплексная форма рядов Фурье.

Тема 5. Интеграл Фурье и преобразование Фурье.
1. Интеграл Фурье.
2. Преобразование Фурье

Критерии формирования оценок (оценивания) устного опроса.

В результате устного опроса знания, обучающегося оцениваются по следующей шкале:

4 балла, ставится, если обучающийся:

1) полно излагает изученный материал, даёт правильное определенное экономических понятий;

2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;

3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

3 балла, ставится, если обучающийся даёт ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для балла «1», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1-2 недочёта в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

2-1 балл, ставится, если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий;

2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;

3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

0 баллов, ставится, если обучающийся обнаруживает незнание большей части соответствующего раздела изучаемого материала, допускает ошибки в формулировке.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

Практические задания для самостоятельной работы по темам дисциплины (контролируемая компетенция ОПК-1)

СЕМЕСТР №1

Тема 1. Введение в математический анализ.

1. Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

1) $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$; 2) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$; 4) $1+2+2^2\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

2. Доказать неравенства:

1) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\quad(n\geq 2)$; 2) $n^{n+1}>(n+1)^n\quad(n\geq 3)$;

3) $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k\ \left(0\leq x_k\leq\pi;\,k=1,2,\ldots,n\right)$; 4) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$.

3. Пусть $\{x+y\}$ есть множество всех сумм $x+y$, где $x\in\{x\},\,y\in\{y\}$. Доказать равенства:

1) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$; 2) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

4. Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений xy, где $x\in\{x\},\,y\in\{y\}$, причем $x\geq 0,\,y\geq 0$. Доказать равенства:

1) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\cdot\inf\{y\}$; 2) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\cdot\sup\{y\}$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Введение в математический анализ». Основная цель сформировать навыки решения задач по основным понятиям математического анализа.

Тема 2. Предел последовательности.

1. Полагая, что n пробегает натуральный ряд чисел, определить значения следующих выражений:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$;

2. Найти наименьший член последовательности x_n $(n=1,2,\ldots)$, если:

1) $x_n=n^2-9n-100$; 2) $x_n=n+\frac{100}{n}$.

3. Найти наибольший член последовательности x_n $(n=1,2,\ldots)$, если:

1) $x_n=\frac{n^2}{2^n}$; 2) $x_n=\frac{\sqrt{n}}{100+n}$; 3) $x_n=\frac{1000^n}{n!}$.

4. Для последовательности x_n $(n=1,2,\ldots)$ найти $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ и $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n=1-\frac{1}{n}$; 2) $x_n=1+\frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$;

3) $x_n=\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$; 4) $x_n=1+n\sin\frac{\pi}{2}$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Предел последовательности». Основная цель сформировать навыки вычисления пределов последовательностей.

Тема 3. Предел функции.

1. Определить области существования и множество значений следующих функций:

1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$; 2) $y=\lg(1-2\cos x)$;

3) $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$; 4) $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

2. Исследовать на монотонность следующие функции:

1) $f(x)=ax+b$; 2) $f(x)=ax^2+bx+c$;

3) $f(x)=x^3$; 4) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.

3. Найти указанные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; 2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{3x^2}$; 10) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi/2-x)\operatorname{tg}x$.

4. Доказать, что функции $f(x)=\operatorname{tg}2x$ и $\varphi(x)=\arcsin x$ при $x\to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

5. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Предел функции». Основная цель сформировать навыки вычисления пределов функции.

Тема 4. Непрерывные функции.

1. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их:

1) $f(x)=\begin{cases} x+4, \; x<-1, \\ x^2+2, \; -1\le x<1, \\ 2x, \; x\ge 1; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, \; x\le 0, \\ 0, \; 0<x\le 2, \\ x-2, \; x>2; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \sin x, \; x<0, \\ x, \; 0\le x\le 2, \\ 0, \; x>2; \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} 1, \; x\le 0, \\ 2^x, \; 0<x\le 2, \\ x+3, \; x>2; \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} x^3, \; x<-1, \\ x-1, \; -1\le x\le 3, \\ -x+5, \; x>3; \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} 2, \; x<-1, \\ 1-x, \; -1\le x\le 1, \\ \ln x, \; x>1. \end{cases}$

2. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках:

1) $f(x)=2^{1/(x-3)}+1, \quad x_1=3, \quad x_2=4$;

2) $f(x)=(x+7)/(x-2), \quad x_1=2, \quad x_2=3$;

3) $f(x)=3x/(x-4), \quad x_1=4, \quad x_2=5$;

4) $f(x)=6^{2/(4-x)}+1, \quad x_1=3, \quad x_2=4$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Непрерывность функции». Основная цель сформировать навыки исследования функцию на непрерывность.

Тема 5. Производные и дифференциалы.

1. Продифференцировать данные функции:

1) $y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x}+3\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$;

3) $y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$; 4) $y=arcctg^2 5x\cdot\ln(x-4)$;

5) $y=tg^4 3x\cdot\arcsin 2x^3$; 6) $y=(x-3)^4\arccos 5x^3$;

7) $y=\dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$; 8) $y=\dfrac{\log_5(3x-7)}{ctg 7x^3}$;

9) $y=\dfrac{arcctg^4 5x}{sh\sqrt{x}}$; 10) $y=\dfrac{9arctg(x+7)}{(x-1)^2}$;

11) $y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}}\log_2(x-3x^2)$; 12) $y=(cth3x)^{\arcsin x}$;

13) $y=(\arccos(x+2))^{tg3x}$; 14) $y=\dfrac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$.

2. Найти y' и y'':

1) $y^2=8x$; 2) $\begin{cases} x=(2t+3)\cos t, \\ y=3t^3. \end{cases}$

3. Для данной функции $y=\sin^2 x$ и аргумента $x_0=\pi/2$ вычислить $y'''(x_0)$.

4. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=\ln x$.

5. Записать уравнение касательной к кривой $y=x^2-7x+3$ в точке с абсциссой $x=1$.

6. Траектория движения тела – кубическая парабола $12y=x^3$. В каких точках скорости возрастания абсциссы и ординаты одинаковы?

7. Найти дифференциалы функций:

1) $y=2^{\cos x}4$ 2) $y=\ln^3\sin x$.

8. Вычислить приближенно:

1) $\sin 29°4$ 2) $\mathrm{arctg}1,05$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Производная и дифференциалы». Основная цель сформировать навыки вычисления производной и дифференциалов.

Тема 6. Свойства дифференцируемых функций.

1. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{tg^2 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{ctgx}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(2+x)-\ln(x+1))$.

2. С помощью дифференциала приближенно вычислить величины и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой):

1) $\sqrt[5]{34}$; 2) $\arcsin 0,6$.

3. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

4. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

1) $f(x)=\cos x, \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}, [-1;1]$.

5. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

1) $f(x)=e^x, [0;1]$; 2) $f(x)=|x-1|, [0;3]$.

6. Разложить многочлен $P(x)$ по степеням $x-x_0$, если:

1) $P(x)=x^4-3x^2+x-1, x_0=-2$; 2) $P(x)=x^3+4x^2+8x+\frac{7}{8}, x_0=\frac{1}{2}$.

7. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)=xe^x, x_0=-1$; 2) $f(x)=\ln(2x-1), x_0=1$.

8. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)$ до $o(x^k)$:

1) $f(x)=\sin^2 x, k=4$; 2) $f(x)=chx, k=5$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Свойства дифференцируемых функций». Основная цель сформировать навыки использования основных свойств дифференцируемых функций.

***Тема 7. Исследование поведения функций*.**

1. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики:

1) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$; 2) $y=e^{1/(5+x)}$;

3) $y=e^{2x-x^2}$; 4) $y=\ln(1-1/x^2)$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1) $y=\ln(x^2-2x+2), [0;3]$; 2) $y=3x/(x^2+1), [0;5]$;

3) $y=(2x-1)/(x-1)^2, [-1/2;0]$; 4) $y=xe^x, [-2;0]$.

3. Исследовать на экстремум функцию $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

4. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y=x^3/(2(x+1)^2)$.

5. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y=arctgx-x$.

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x+3\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-1;1]$.

7. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y=x^3-3x^2-9x+7$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Исследование поведения функций». Основная цель сформировать навыки исследования функции с помощью производных.

СЕМЕСТР №2

Тема 1. Неопределённый интеграл.

Найти следующие интегралы:

1) $\int x\sqrt{x^2-5}dx$; 2) $\int \frac{x^3}{x^2+x+1}dx$;

3) $\int \frac{5}{1-2x}dx$; 4) $\int \frac{5x-1}{3x^2-2x+1}dx$;

5) $\int \sin(1-3x)dx$; 6) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$;

7) $\int \sqrt{\cos^3 x}\sin xdx$; 8) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}+1)}dx$;

9) $\int x^2e^x dx$; 10) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;

11) $\int \ln xdx$; 12) $\int \frac{\cos^3 x}{4+\sin x}dx$;

13) $\int \frac{1}{x^3+x^2}dx$; 14) $\int \sin 3x\cdot\cos 2xdx$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Неопределенный интеграл». Основная цель сформировать навыки интегрирования функций.

Тема 2. Определенный интеграл.

1. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой:

1) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$; 2) $\int_2^3 y\ln(y-1)dy$;

3) $\int_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$; 4) $\int_0^2 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$;

5) $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$; 6) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$;

7) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$.

2. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

1) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

3. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

1) $\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$; 2) $y=\sqrt{x}, \quad y=x^3$; 3) $x=7\cos^3 t, \quad y=7\sin^3 t$.

4. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги данной линии:

1) $\rho = \sin^3(\varphi/3), \quad 0 \le \varphi \le \pi/2$; 2) $x = 2\cos^3 t, \quad y = 2\sin^3 t$;

3) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}$.

5. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг указанной оси координат:

1) Ф: $y^2 = 4 - x, x = 0, Oy$; 2) Ф: $x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t), Ox$;

3) Ф: $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$, полярная ось.

6. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь поверхности, образованной вращением дуги L вокруг указанной оси:

1) L: $y = x^3/3 \quad (-1/2 \le x \le 1/2), Ox$; 2) L: $\rho = 2\cos\varphi$;

3) L: $x = 10(t - \sin t), y = 10(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi), Ox$.

7. Вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара: правильная четырехугольная пирамида со стороной 2 м и высотой 5 м. Удельный вес воды принять равным 9,81 кН/м^3, $\pi = 3{,}14$.

8. Вычислить работу, затрачиваемую на преодоление силы тяжести при построении сооружения Q из некоторого материала, удельный вес которого $\gamma = 24$ кН/м^2, где Q – правильная усеченная четырехугольная пирамида, сторона верхнего основания которой равна 2 м, нижнего – 4 м., высота 2 м.

9. Найти координаты центра масс однородной кривой L:

1) L: полуокружность $x^2 + y^2 = R^2$, расположенная над осью *Ox.*

2) L: первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \; (0 \le t \le 2\pi)$.

3) L: дуга кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi) \; (0 \le \varphi \le \pi)$.

10. Найти координаты центра масс однородной фигуры Ф, ограниченной данными линиями:

1) Ф - треугольник, стороны которого лежат на прямых $x + y = a, x = 0, y = 0$.

2) Ф – ограниченная первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ и осью *Ox.*

3) Ф ограничена кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Определенный интеграл». Основная цель сформировать навыки вычисления определенных интегралов, приобрести опыт их прикладного использования.

Тема 3. Функции многих переменных.

1.Дано $f(x;y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - \dfrac{x + y}{x - y}$. Найти:

1) $f(y;x)$; 2) $f(1/x;1/y)$; 3) $f(-x;-y)$; 4) $f(1;y/x)$.

2. Найти область определения указанных функций:

1) $z = \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$; 2) $z = \log_3(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$;

3) $z = \arccos\frac{x+y}{x^2+y^2}$; 4) $u = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

3. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{5\sin^3 x - \sin y^2}{\sqrt{25+\sin y^2 - 5\sin^3 x} - 5}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 5}} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y^2)\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{y}\right)$;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\arcsin x^2 y}{xy^2}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2+y^2+3(x^4+y^4)}{7(x^4+y^4)}$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Функции многих переменных». Основная цель сформировать навыки исследования функции многих переменных.

***Тема 4. Дифференциальное исчисление функций многих переменных*.**

1. Найти частные производные и частные дифференциалы следующих функций:

1) $z = \ln(y^2 - e^{-x})$; 2) $z = \arcsin\sqrt{xy}$;

3) $z = arctg(x^2+y^2)$; 4) $z = \cos(x^3 - 2xy)$;

5) $z = \sin\sqrt{y/x^3}$; 6) $z = tg(x^3+y^3)$;

7) $z = e^{-x^2+y^2}$; 8) $z = \ln(3x^2 - y^4)$.

2. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

1) $f(x,y,z) = z/\sqrt{x^2+y^2}$, $M_0(0;-1;1)$; 2) $f(x,y,z) = \ln\left(x+\frac{y}{2z}\right)$, $M_0(1;2;1)$.

3. Найти полные дифференциалы указанных функций:

1) $z = 2x^3y - 4xy^5$; 2) $z = x^2 y\sin x - 3y$;

3) $z = \mathrm{arctg}x + \sqrt{y}$; 4) $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$.

4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой:

1) $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$; 2) $u = \ln(e^x + e^{-y})$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$;

3) $u = y^x$, $x = \ln(t-1)$, $y = e^{t/2}, t_0 = 2$; 3) $u = e^{y-2x+2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t, t_0 = \pi/2$.

5. Найти вторые частные производные указанных функций:

1) $z = tg(x/y)$; 2) $z = \cos\left(xy^2\right)$;

3) $z = \arcsin(x-y)$; 4) $z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right)$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Дифференциальное исчисление функции многих переменных». Основная цель сформировать навыки вычисления производной и дифференциала функции многих переменных.

Тема 5. Неявные функции.

1. Вычислить значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ с точностью до двух знаков после запятой:

1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4, \quad M_0(2;1;1)$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2, \quad M_0(-1;0;1)$;

3) $3x - 2y + z = xz + 5, \quad M_0(2;1;-1)$;

4) $e^z + x + 2y + z = 4, \quad M_0(1;1;0)$;

5) $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0, \quad M_0(1;1;-1)$;

6) $z^3 + 3xyz + 3y = 7, \quad M_0(1;1;1)$;

7) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 3/2, \quad M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$;

8) $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1, \quad M_0\left(0; \frac{\pi}{2}; 1\right)$;

9) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0, \quad M_0(1;2;1)$;

10) $xy = z^2 - 1, \quad M_0(0;1;-1)$.

2. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к заданной поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$ в точке $M_0(2;1;-1)$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Неявные функции». Основная цель сформировать навыки вычисления частных производных неявно заданной функции.

Тема 6. Экстремумы функций многих переменных.

1. Исследовать данные функции на локальный экстремум:

1) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; 2) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

3) $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y$.

2. Найти экстремумы функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ в области, ограниченной прямыми $x = 0, y = 0, x + y = 3$.

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 y(4 - x - y)$ в области, ограниченной прямыми $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области $\overline{D}$, ограниченной заданными линиями:

1) $z = 3x + y - xy, \quad \overline{D}: y = x,\ y = 4,\ x = 0$;

2) $z = xy - 2x - y, \quad \overline{D}: x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 4$;

3) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad \overline{D}: x = -1,\ x = 1,\ y = -1,\ y = 1$;

4) $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2, \quad \overline{D}: x + y + 2 = 0,\ y = 0,\ x = 0$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Экстремумы функции многих переменных». Основная цель сформировать навыки исследования функции многих переменных с помощью частных производных.

СЕМЕСТР №3

Тема 1. Числовые ряды.

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}$.

2. Исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3 - 1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n (n+2)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+2n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

3. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{a^n!} = 0$ при $a > 1$.

4. С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

5. Исследовать на условную и абсолютную сходимости следующие ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\cdot 2^{-n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2-9}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n+5}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\alpha)}{n^2+1}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

6. Составить разность двух расходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ и исследовать на сходимость полученный ряд.

7. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2}$ с точностью $\delta = 0{,}01$.

8. Сколько первых членов ряда нужно взять, чтобы их сумма отличалась от суммы ряда на величину, меньшую, чем 10^{-6}:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Числовые ряды». Основная цель сформировать навыки исследования сходимости числовых рядов.

***Тема 2. Функциональные последовательности и ряды*.**

1. Найти область сходимости ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\ln x}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^n x^n}\right)$.

2. Доказать равномерную сходимость функциональных рядов в указанных промежутках:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ на отрезке [-1;1];

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ на всей числовой оси.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ на отрезке [0;1].

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Функциональные последовательности и ряды». Основная цель сформировать навыки исследования функциональных рядов.

Тема 3. Степенные ряды.

1. Найти область сходимости каждого из следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{3^n\sqrt{(n+1)^3}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)\cdot 4^n}$; 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2(n-1)}}{\sqrt{n^3-1}}$.

2. Найти область равномерной сходимости следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$.

3. Применив почленное интегрирование и дифференцирование, найти суммы указанных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$.

4. Найти первые три члена разложения функции $f(x)=\sqrt{x}$ в ряд по степеням $x-4$.

5. Разложить в степенной ряд функции $f(x)=\ln(1-3x)$ и найти область сходимости этого ряда.

6. Найти разложение в степенной ряд функции $f(x)=x\sin 2x$.

7. Разложить в степенной ряд функцию $f(x)=\dfrac{3}{(1+x)(1-2x)}$ и найти область сходимости этого ряда.

8. Разложить по степеням суммы $x+1$ многочлен $f(x)=x^4+3x^3-6x^2+3$.

9. Разложить в степенной ряд функцию $f(x)=\ln(1+2x)$ и найти область сходимости этого ряда.

10. С помощью степенного ряда вычислить $\sin 1$ с точностью $\delta=0{,}001$.

11. Найти круг сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(z-i)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^{2n}}{n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+i}\right)^n(z-i)^n$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Степенные ряды». Основная цель сформировать навыки исследования степенных рядов и разложение в степенной ряд.

Тема 4. Кратные интегралы.

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями:

1) $D: y=\sqrt{4-x^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\ge 0$; 2) $D: x^2=2y,\ 5x-2y-6=0$.

2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями:

1) $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy,\quad D: y=x^2,\ x=y^2$; 2) $\iint\limits_D xy^2dxdy,\quad D: y=x^2,\ y=2x$.

3. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(1+x^2+y^2\right)dy$.

4. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями:

1) $D: y^2=4x,\ x+y=3,\ y\ge 0$; 2) $D: y=8/(x^2+4),\ x^2=4y$;

3) $D: y=\cos x,\ y\le x+1,\ y\ge 0$; 4) $D: x=\sqrt{4-y^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\ge 0$.

5. С помощью двойных интегралов вычислить в полярных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:

1) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(4x^2+y^2\right)$; 2) $\rho=2a(2+\cos\varphi)$.

6. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

1) $z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$; 2) $z=3x^2+2y^2+1,\ y=x^2-1,\ y=1,\ z\ge 0$.

7. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена указанными поверхностями. Начертить область интегрирования:

1) $V: x=2,\ y=4x,\ y=3\sqrt{x},\ z\ge 0,\ z=4$;

2) $V: x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ 2x+3y=6,\ z=3+x^2+y^2$.

8. Вычислить данные тройные интегралы:

1) $\iiint\limits_V \left(2x^2+3y+z\right)dxdydz$, $V: 2\le x\le 3,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 4$;

2) $\iiint\limits_V x^3yz\,dxdydz$, $V: -1\le x\le 2,\ 1\le y\le 3,\ 0\le z\le 1$.

9. Вычислить данные тройные интегралы с помощью цилиндрических или сферических координат:

1) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, $V: x^2+y^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$;

2) $\iiint\limits_V \frac{x^2dxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}}$, $V: x^2+y^2+z^2=16,\ z\geq 0$.

10. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

1) $z^2=4-x, x^2+y^2=4x$;

2) $x\geq 0,\ z\geq 0, z=y, x=4, y=\sqrt{25-x^2}$.

11. Вычислить массу неоднородной пластины D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu=\mu(x,y)$, если $D: y=x^2-1, x+y=1, \mu=2x+5y+8$.

12. Вычислить статический момент однородной пластины D, ограниченной данными линиями, относительно указанной оси, использовав полярные координаты, если $D: x^2+y^2+2ay=0, y-x\leq 0, x+y\leq 0$.

13. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную указанными поверхностями, если $V: z=2\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=9, z=0$.

14. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, занимающего область V, ограниченную данными поверхностями, если $V: z=3-x^2-y^2, z=0, Oz$, плотность тела $\delta=1$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Кратные интегралы». Основная цель сформировать навыки вычисления и применения кратных интегралов.

Тема 5. Криволинейный интеграл.

1. Вычислить данные криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_{L_{AB}}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$, где L_{AB} - дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.

2) $\int\limits_{L_{AB}}\frac{x^2dy-y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} - дуга астроиды $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$;

3) $\oint\limits_L (x+2y)dx+(x-y)dy$, где L - окружность $x=2\cos t, y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

4) $\oint\limits_L ydx-xdy$, где L - дуга эллипса $x=3\cos t, y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

5) $\int\limits_L arctg\frac{y}{x}dl$, где L - дуга кардиоиды $\rho=(1+\cos\varphi), 0\leq\varphi\leq\pi/2$.

6) $\oint\limits_L\sqrt{2y^2+z^2}dl$, где L - окружность $x^2+y^2+z^2=a^2, =y$.

7) $\int\limits_{L_{AB}} \cos z dx - \sin x dz$, где L_{AB} - отрезок прямой, соединяющий точки $A(2;0;-2)$ и $B(-2;0;2)$.

8) Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x,y)$. Найти функцию $u(x,y)$.

1) $(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$; 2) $\left(\dfrac{2xy^2}{1+x^2y^2}-3\right)dx+\left(\dfrac{2xy^2}{1+x^2y^2}-5\right)dy$.

9. Вычислить длину дуги цепной линии $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in[0;1]$.

10. Найти координаты центра масс первого полувитка винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, считая плотность в каждой ее точке постоянной.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Криволинейные интегралы». Основная цель сформировать навыки вычисления и применения кратных интегралов.

СЕМЕСТР №4

Тема 1. Элементы теории поверхностей.

1. Найти значение производной вектор-функции $\mathbf{r}=4(t^2+t)\mathbf{i}+\operatorname{arctg}t\,\mathbf{j}+\ln(1+t^2)\mathbf{k}$ при $t=1$.

2. Дано векторно-параметрическое уравнение движения точки М: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(2t^2+3)\mathbf{i}-3t^2\mathbf{j}+(4t^2-5)\mathbf{k}$. Вычислить скорость $|\mathbf{v}|$ и ускорение $|\mathbf{w}|$ движения точки в момент времени $t=0{,}5$.

3. Дано уравнение движения материальной точки $\mathbf{r}=2\cos t\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$. Определить траекторию движения, вычислить скорость $|\mathbf{v}|$ и ускорение $|\mathbf{w}|$ движения этой точки в любой момент времени t.

4. Записать каноническое уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $\mathbf{r}=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ в точке $t=3$.

5. Записать каноническое уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой, заданной уравнениями $z=x^2+y^2,\ y=x$ в точке $M_0(1;1;2)$.

6. Доказать, что вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{r}'$, если $|\mathbf{r}|=const$.

7. Вычислить производную функции $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$ в точке $M_1(1;3;2)$ по направлению к точке $M_2(0;5;0)$.

8. Вычислить производную функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M_0(3;4)$ по направлению: а) вектора $\mathbf{a}=(1;1)$; б) радиуса-вектора точки M_0; в) вектора $\mathbf{s}=(4;3)$.

9. Вычислить производную функции $z=\operatorname{arcrg}(y/x)$ точке $M_0(2;-2)$ окружности $x^2+y^2=4x$ вдоль дуги этой окружности.

10. Вычислить производную функции $u = \ln(xy + xz + yz)$ в точке $M_0(0;1;1)$ по направлению окружности $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1$.

11. Вычислить координаты единичного вектора, направленного по нормали к поверхности $(z^2 - y^2)xyz - y^5 = 5$ в точке $M_0(1;1;2)$.

12. Найти $\mathrm{grad}\,u$ в точке $M_0(1;1;1)$, если $u = x^2yz - xy^2z + xyz^2$.

13. Найти угол φ между градиентами функций $u = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$ и $v = x^2yz$ в точке $M_0(2;1/3;\sqrt{3}/2)$.

14. Найти наибольшую крутизну подъема φ поверхности $z = 2x^2/y^3$ в точке $M_0(2;1;8)$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Элементы теории поверхностей». Основная цель сформировать навыки использования элементов теории поверхностей.

Тема 2. Поверхностные интегралы.

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости (p), отсеченная координатными плоскостями:

1) $\iint\limits_S (2x + 3y + 2z)dS, \quad (p): x + 3y + z = 3$;

2) $\iint\limits_S (2 + y - 7x + 9z)dS, \quad (p): 2x - y - 2z = -2$;

3) $\iint\limits_S (6x + y + 4z)dS, \quad (p): 3x + 3y + z = 3$;

4) $\iint\limits_S (x + 2y + 3z)dS, \quad (p): x + y + z = 2$;

5) $\iint\limits_S (3x - 2y + 6z)dS, \quad (p): 2x + y + 2z = 2$.

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода:

1) $\iint\limits_S (y^2 + z^2)dydz$, где S – часть поверхности параболоида $x = 9 - y^2 - z^2$, отсеченная плоскость. $x = 0$.

2) $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$, где S – часть поверхности гиперболоида $x^2 + y^2 = z^2 + 1$, отсекаемая плоскостями $z = 0,\ z = \sqrt{3}$.

3) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz - zdxdy$, где S – часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостями $z = 0$ и $z = 3$.

4) $\iint\limits_S (y^2+z^2)dydz - y^2dxdz + 2yz^2dxdy$, где S – часть поверхности конуса $x^2+z^2=y^2$, отсекаемая плоскостями $y=0$ и $y=1$.

5) $\iint\limits_S 2xdydz - ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона замкнутой поверхности, образованной параболоидом $3z=x^2+y^2$ и полусферой $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Поверхностные интегралы». Основная цель сформировать навыки вычисления и применения поверхностных интегралов.

***Тема 3. Скалярные и векторные поля*.**

1. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (р) и координатными плоскостями, двумя способами: а) использовав определение потока; б) с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

1) $\mathbf{a}(M)=3x\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(x-z)\mathbf{k},\quad (p): x+3y+z=3$;

2) $\mathbf{a}(M)=3x\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+(y+z)\mathbf{k},\quad (p): 3x+3y+z=3$;

3) $\mathbf{a}(M)=(x+z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x+2y+z)\mathbf{k},\quad (p): x+y+z=2$;

4) $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+(y-z)\mathbf{k},\quad (p): 2x-y-2z=-2$;

5) $\mathbf{a}(M)=(x+y-z)\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+(x+2z)\mathbf{k},\quad (p): x+2y+z=2$.

2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax+By+Cz=D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\mathbf{n}=(A,B,C)$ этой плоскости двумя способами: 1) использовав определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса:

1) $\mathbf{a}(M)=z\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+y\mathbf{k},\quad (p): 2x+y+2z=2$;

2) $\mathbf{a}(M)=(x+z)\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(2x-y)\mathbf{k},\quad (p): 3x+2y+z=6$;

3) $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+x\mathbf{j}+(y-2z)\mathbf{k},\quad (p): 2x+2y+z=2$;

4) $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+x\mathbf{k},\quad (p): x+2y+2z=4$;

5) $\mathbf{a}(M)=(2z-x)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}+(3x+z)\mathbf{k},\quad (p): x+y+2z=2$.

3. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M)=u(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0z_0)$:

1) $u(M)=xyz,\quad M_0(0;1;-2)$; 2) $u(M)=x^2z-y^2,\quad M_0(1;1;-2)$

4. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\mathbf{a}(M)=(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$:

1) $\mathbf{a}(M)=x^2\mathbf{i}-xy^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k},\quad M_0(0;1;-2)$;

2) $\mathbf{a}(M)=xy^2\mathbf{i}+yz^2\mathbf{j}-x^2\mathbf{k},\quad M_0(1;-2;0)$.

5. Выяснить, является ли векторное поле $\mathbf{a}(M)=x^2y\mathbf{i}-2xy^2\mathbf{j}+2xyz\mathbf{k}$ соленоидальным.

6. Выяснить, является ли векторное поле $\mathbf{a}(M) = (yz - 2x)\mathbf{i} + (xz + zy)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ потенциальным.

7. Выяснить, является ли векторное поле $\mathbf{a}(M) = x^2 z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$ гармоническим.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Скалярные и векторные поля». Основная цель сформировать навыки исследования скалярных векторных полей и их применений.

Тема 4. Тригонометрические ряды Фурье.

1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \le 0, \\ 2x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

имеющую период 2π .

2. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi + 2x, & -\pi < x \le 0, \\ -\pi, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию (с периодом $\omega = 4$), если

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -2 < x \le 0, \\ -1, & 0 < x \le 2. \end{cases}$$

4. Найти разложение в ряд Фурье функции $y = x^2$ на отрезке $[-\pi;\pi]$. Построить графики функции и суммы ряда.

5. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x) = x^2$ в интервале $(0;\pi)$. Построить графики данной функции и суммы ряда.

6. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $y = \sin x$ на отрезке $[0;\pi]$.

7. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию $f(x) = 1 - x/2$ на отрезке $[0;2]$.

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $f(x) = 1 - 2x$ на отрезке $[0;1]$.

9. Пользуясь разложением в ряд Фурье по синусам кратных дуг функции $f(x) = 1$ на отрезке $[0;\pi]$, найти сумму ряда $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Тригонометрические ряды Фурье». Основная цель сформировать навыки разложения в ряд Фурье функций.

Тема 5. Интеграл Фурье и преобразование Фурье.

1. Представить интегралом Фурье следующие функции:

1) $f(x)=\begin{cases} h\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right), & |x|\le a, \\ 0, & |x|>a; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & |x|\le \pi, \\ 0, & |x|>\pi; \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} A\sin \omega x, & |x|\le \dfrac{2\pi n}{\omega}, \\ 0, & |x|>\dfrac{2\pi n}{\omega}; \end{cases}$

5) $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x \quad (\alpha>0)$.

2. Найти преобразование Фурье для функции:

1) $f(x)=\begin{cases} \cos(x/2), & |x|<\pi, \\ 0, & |x|>\pi; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} -e^{x}, & -1\le x<0, \\ e^{-x}, & 0\le x\le 1, \\ 0, & |x|>1; \end{cases}$

3) $f(x)=e^{-x^2/2}$; 4) $f(x)=e^{-x^2/2}\cos\alpha x$;

5) $f(x)=\begin{cases} -1, & -1\le x\le -1/2, \\ 0, & -1/2\le x<1/2. \end{cases}$

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Интеграл Фурье и преобразование Фурье». Основная цель сформировать навыки применения интеграла Фурье и преобразования Фурье.

Критерии формирования оценок по заданиям для самостоятельной работы студента (типовые задачи):

«отлично» (4 балла) - обучающийся показал глубокие знания материала по поставленным вопросам, грамотно, логично его излагает, структурировал и детализировал информацию, избегая простого повторения информации из текста, информация представлена в переработанном виде. Свободно использует необходимые формулы при решении задач;

«хорошо» (3 балла) - обучающийся твердо знает материал, грамотно его излагает, не допускает существенных неточностей в процессе решения задач;

«удовлетворительно» (2 балла) - обучающийся имеет знания основного материала по поставленным вопросам, но не усвоил его деталей, допускает отдельные неточности при решении задач;

«неудовлетворительно» (менее 1 балла) – обучающийся допускает грубые ошибки в ответе на поставленные вопросы и при решении задач.

Оценочные материалы для контрольной работы, (контролируемая компетенция ОПК-1)

Образцы контрольных заданий.

1 курс 2 семестр:

Рейтинговая контрольная точка № 1

Найти указанные пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{90}}{n^{96}-10n^2+1}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg\left(n^2+2n\cos n+1\right)}{1+\lg(n+1)}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(n^2-n+1\right)}{\ln\left(n^{10}+n+1\right)}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}\ (a\neq 0)$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^n}\right)$.

Рейтинговая контрольная точка № 2

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-3x+1}{x^3-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{5x}$.

5. Для данной функции $f(x)$ требуется:

а) найти точки разрыва;

б) найти скачок функции в каждой точке разрыва;

в) сделать чертеж.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi,\\ \sin x, & -\pi<x<0,\\ \pi, & x\geq 0.\end{cases}$$

Рейтинговая контрольная точка № 3

1. Найти производную функции

$$y=\operatorname{arctg}^3\ln\frac{\sqrt{x}}{x+2}.$$

2. Найти производную функции $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\arcsin x}$.

3. Найти производную $y'(x)$ неявной функции

$$\sin(x-2y)+\frac{x^3}{y}=7x.$$

4. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $x=e^{-t}\cdot\cos t$, $y=e^{t}\cdot\cos t$.

5. Найти предел, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}.$$

6. Провести полное исследование функции $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ и построить ее график.

2 курс 3 семестр:

Рейтинговая контрольная точка № 1

1. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{n^2}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{n+2}}$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)$. в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$.

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$. е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i + (-1)^n n}{n^2}$.

2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{n+1}$.

3. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{3n}$.

Рейтинговая контрольная точка № 2

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y)\, dx.$$

2. Найти массу треугольника AOB, если $O(0;0)$, $A(1;-1)$, $B(1;1)$, а плотность равна $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

3. Найти объем тела, ограниченного плоскостью Oxy, цилиндром $x^2 + y^2 = 4x$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (внутреннего по отношению к цилиндру).

4. Найти площадь поверхности $z = \frac{xy}{a}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

5. Вычислить тройной интеграл

$\iiint_V x\, dv$, где V - область, ограниченная поверхностями $x = 1,\ y = 0,\ y = 10x,\ z = 0,\ z = xy$.

Рейтинговая контрольная точка № 3

1. Вычислить

$$\int_L \frac{y^2}{x} dl,$$

где L - дуга параболы $y^2 = 2x$, заключенная между точками $(1;\sqrt{2})$ и $(2;2)$.

2. Вычислить

$$\int_L (4y+4)dx + (3x+3y+4)dy,$$

где L - контур треугольника $x=0,\ y=0,\ 2x+3y=6$, и результат проверить при помощи формулы Грина.

3. Вычислить $\int\limits_{(1;1)}^{(4;9)}\left(3x^2-3y^2-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)dx+\left(-6xy+\frac{1}{2\sqrt{xy}}\right)dy$.

4. Дана функция $u(M)=x^2y+y^2z+z^2x$ и точки $M_1(1;-1;2), M_2(3;4;-1)$. Вычислить: 1) производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

2 курс 2 семестр:

Рейтинговая контрольная точка № 1

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S x^2dS,$$

где S - боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2},\ 0\le z\le h$.

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_\sigma y^2dxdz,$$

σ - внутренняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ y\ge 0$.

Рейтинговая контрольная точка № 2

1. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M)=3x\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(x-z)\mathbf{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $x+3y+z=3$ и координатными плоскостями, двумя способами: а) использовав определение потока; б) с помощью формулы Остроградского – Гаусса.

2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)=z\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $2x+y+2z=2$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нармального вектора $\mathbf{n}=(2;1;2)$ этой плоскости двумя способами: 1) использовав определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса.

3. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M)=xyz$ в точке $M_0(0;1;-2)$.

4. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\mathbf{a}(M)=x^2\mathbf{i}-xy^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ в точке $M_0(0;1;-2)$.

5. Выяснить является ли векторное поле $\mathbf{a}(M)=(\alpha-\beta)x\mathbf{i}+(\gamma-\alpha)y\mathbf{j}+(\beta-\gamma)z\mathbf{k}$ соленоидальным.

Рейтинговая контрольная точка № 3

1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию

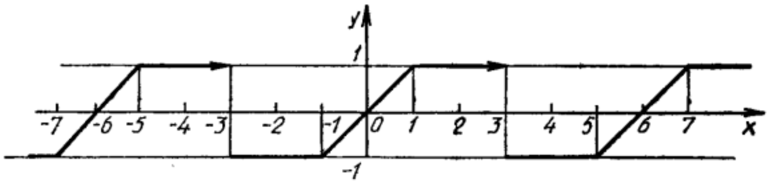
$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x < 0, \\ x-1, 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

заданную на отрезке $\left[-\pi;\pi\right]$.

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = e^x$, заданную в интервале $(0;\pi)$, продолжив (доопределив) ее четным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, заданную в интервале $(-1;1)$ с периодом $\omega = 2$.

4. Разложить в ряд Фурье функцию заданную графически.



5. Воспользовавшись разложением функции $f(x) = |x|$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$, найти сумму данного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Критерии формирования оценок по контрольным работам:

7 баллов - ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочетов; обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, решено 100% задач;

6 баллов – ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов. Обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, допуская незначительные неточности при решении задач, решено 70% задач;

5 баллов – ставится за работу, если студент правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой. Обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, решено 55% задач

менее *4 баллов* – ставится за работу, если число ошибок и недочетов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы. Обучающийся дает неверную оценку ситуации, решено менее 50 % задач.

Тестовые задания по дисциплине «Введение в элементарную математику» (контролируемые компетенции «ОПК-1»)

1. Областью определения функции

$$y = \lg(1 - \lg(x^2 - 5x + 16))$$

является:

1) D(y) = [2;3) 2) D(y) = [2;3] 3) D(y) = (2;3] 4) D(y) = (2;3)

2. Область определения для функции $y = \log_3(4x^2 - 1)$ есть:

1) D(y) = $(-\infty; -\frac{1}{2}\ ] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ 2) D(Y) = $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

3) D(y) = $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ 4) D(y) = $[0; \frac{1}{2}]$

3. Для функции $y = \arcsin(\lg(\frac{x}{10}))$ областью определения является множество:

1) D(y) = [1,10]; 2) D(y) = (1; 100); 3) D(y) = [1; 100]; 4) D(y) = [-1; 1]

4. Функция $y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 + x^2}$

1) четна; 2) нечетна; 3) общего вида; 4) ни четна и ни нечетна

5. Функция $y = |x - 7|$

1) четна; 2) нечетна; 3) ни четна и ни нечетна; 4) общего вида

6. Функция $y = e^{x^2}$

1) четна; 2) нечетна; 3) общего вида 4) ни четна и ни нечетна

7. Функция $y = e^x + e^{-x}$

1) нечетна; 2) четна; 3) общего вида; 4) четна, но нечетна

8. Обратной для функции $y = x^2 - 1$ является :

1) $x = \pm\sqrt{y + 1}$; 2) $x = \sqrt{y^2 - 1}$; 3) $x = \sqrt{y^2 + 1}$; 4) $x = \sqrt{y + 1}$

9. Для функции $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ обратной является:

1) $x = \sqrt{1 - y^3}$ 2) $x = \sqrt{y}$ 3) $x = y$ 4) $x = \sqrt[3]{1 + y^3}$

10. Для функции $y = log_x 2$ обратной является:

1) $x = 2^{\frac{1}{y}}$; 2) $x = log_y 2$; 3) $x = ln\, y$; 4) $x = 2^y$

11. Обратной к функции $y = 2^x$ является

1) $x = log_2 y$; 2) $x = 2^y$; 3) $x = ln\, y$; 4) $x = y^2$

12. Общий член последовательности 1, 4, 9, 16 , 25,…. 1) n; 2) n^2; 3) n^3; 4) n^2-1

13. Общий член последовательности 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,….. 1) n; 2) $\frac{1}{n}$; 3) $\frac{1}{n-1}$; 4) $\frac{1}{n^2 - 1}$

14. Общий член последовательности 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{6}$,….. есть

1) $\frac{n}{n+1}$; 2) $\frac{n}{n+2}$; 3) $\frac{n}{n+3}$; 4) $\frac{n-1}{n+2}$

15. Общий член последовательности

1, -$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, -$\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$,… 1) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$; 2) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$; 3) $\frac{(-1)^n}{2n-1}$; 4) $\frac{(-1)^n}{2n}$

16. Предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$ равен 1) ∞ 2) $\frac{2}{5}$ 3)0 4) $\frac{3}{2}$

17. Предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$ равен 1)0 2) ∞ 3) $\frac{1}{2}$ 4)2

18. Предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ равен 1) ∞ 2)1 3)0 4) $\frac{1}{2}$

19. Функция $y = xe^{-x}$ является возрастающей на

1) $(-\infty,1)$ 2)(-1, 1) 3)[0,2] 4) $(-\infty,+\infty)$

20. Функция $y = 2-3x+x^3$ убывает на:

1) (-1,1) 2)(0,1) 3)(1,2) 4) $(-\infty,+\infty)$

21. Функция $y = x(1+\sqrt{x})$ является возрастающей на:

1) $(-\infty,+\infty)$ 2) (1,2) 3) $(0,+\infty)$ 4)(-1,1)

22. Дифференциал 2 порядка функций y=ln(x+ $\sqrt{x^2+4}$) равен:

1) $\dfrac{-x(dx)^2}{(x^2+4)^{3/2}}$ 2) 1 3) $\dfrac{y(dx)^2}{x+y}$ 4) $\left(\dfrac{x}{x-y}\right)dx^2$

23. Дифференциал 2 порядка функций S= e^{t^2} равен:

1) $2e^{t^2}(1+2t^2)(dt)^2$ 2) $e^{t^2}(dt)^2$ 3) $(dt)^2$ 4) $\dfrac{1}{e^{t^2}}(dt)^2$

24. Дифференциал 2 порядка функций V= e^{2t} равен:
1) $4e^{2t}(dt)^2$ 2) $2te^{2t}(dt)^2$ 3) 0 4) $(dt)^2$

25. Для кривой $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ наклонной асимптотой является прямая:

1) y=0 2) y=1 3) y=3x+4 4) y=x-2

26. Для кривой $y = \sqrt[3]{2ax^2-x^3}$ наклонной асимптотой является прямая

1) $y = -x+\frac{2}{3}a$ 2) y=2 3) y=x 4) y=x+3

27. Первообразной для $\int\dfrac{adx}{a-x}$ является функция:

1) $y = a\cdot\ln\left|\dfrac{c}{a-x}\right|$; 2) $y = \ln|a-x|+c$; 3) $y = c-\ln|a-x|$; 4) $y = \ln|a-x|$

28. Первообразной для $\int\dfrac{xdx}{a+bx}$ является функция:

1) $y = \dfrac{x}{b}-\dfrac{a}{b^2}\ln|a+bx|+c$; 2) $y = \dfrac{a}{b}-\dfrac{x}{b}$; 3) $y = \dfrac{b}{a}-\dfrac{a(x-a)}{b}$; 4) $y = a-bx$

29. Первообразной для $\int\dfrac{x^2}{x^2+2}dx$ является функция:

30. Значение интеграла $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ равно:

1) $1-\frac{\Pi}{4}$; 2) 1 ; 3) $\frac{\Pi}{4}$; 4) 0 ;

31. Значение интеграла $\int\limits_{1}^{21} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$ равно:

1) $\sqrt{3}-\frac{\Pi}{3}$; 2) $\sqrt{1}-\frac{\Pi}{4}$; 3) 0 ; 4) 1 ;

32. Значение интеграла $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ равно:

1) 4-*П ;* 2) 4 ; 3) *П ;* 4) 0 ;

33. Значение интеграла $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$ равно:

1) $\frac{1}{5}\ln 112$; 2) ln 112 ; 3) 0 ; 4) 1 ;

34. Площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4x-x^2$ и осью абсцисс, равна:

1) $\frac{32}{3}$ 2) 1 3) 12 4) 10

35. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x(x-1)(x-2)$ и осью *OX* равна:

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) 0 4) 2

36. Площадь фигуры, заключенной между осью *OX* и одной аркой циклоинды *x=a(t-sint),y=a(1-cost)* , равна:

1) $3\Pi a^2$ 2) *Пq* 3) *3q* 4) *П*

37. Длина одной арки циклоиды x=a(t-sint), y=a(1-cost) равна

1) *8a* 2) *4q* 3) *1* 4) $\frac{q}{4}$

38. Частные производные 1 порядка от функции $z=x^5+y^5-5x^3y^3$ равны:

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4-15x^2y^3, \frac{\partial z}{zy}=5y^4-15x^3y^2$ 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=x-y, \frac{\partial t}{zy}=x+y$

3) $\frac{\partial z}{\partial z}=x^2+y^2, \frac{\partial z}{\partial y}=1$ 4) $\frac{\partial z}{\partial z}=2x+3y, \frac{\partial t}{\partial y}=x-y$

39. Частные производные 1 порядка для функции $z=\frac{y}{x}$ равны:

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}, \frac{\partial z}{zy}=\frac{1}{x}$ 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=1, \frac{\partial t}{zy}=0$ 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=x, \frac{\partial z}{\partial y}=y$ 4) $\frac{\partial t}{\partial x}=2x, \frac{\partial t}{\partial y}=y^2$

40. Частная производная 2 порядка $z^{11}_{xx}=$ для функции $Z=e^{xy}$ равна

1) y^2e^{xy} 2) x^2e^{xy} 3) xye^{xy} 4) e^{xy-1}

41. Частная производная 2 порядка $z^{11}_{yy}=$ для функции Z=sin(x+y) равна

1)sin(x-y) 2) sin(x+y) 3)–sin(x+y) 4)–sin(x+y)

42. Частная производная 2 порядка $z_{xy}^{11} =$ для функции Z=ln(x+y)

1) $-\frac{1}{(x+y)^2}$ 2) $\frac{1}{x+y}$ 3) $\frac{1}{(x+y)^2}$ 4) $-\frac{1}{x-y}$

43. Экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ достигается в точке:

1) *M(0,3)* 2) *M(-1,-2)* 3) *M(0,-2)* 4) *M(-1,-2)*

44. Экстремум функции $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, (x > 0, y > 0)$ достигается в точке:

1) *M(5,2)* 2) *M(0,0)* 3) *M(-1,-2)* 4) *M(0,-1)*

45. Условный экстремум $\mathrm{Zmin} = -\frac{19}{4}$ функцией $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$ при условии x+y+3=0 достигается в точке:

1) $x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{3}{2}$ 2) *x=1,y=2* 3) *x=0,y=1* 4) *x=-1,y=-1*

46.Величина повторного интеграла равна:

1) $\int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos(x+y)dy$

1) 1/2
+2) 0
3) π
4) 1

2) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sin\varphi}^1 rdr$

1) π
2) $\frac{\pi}{3}$
+3) $\frac{\pi}{2}$
4) $-\frac{\pi}{2}$

3) $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$

1) 25
2) 5
+3) $\frac{25}{24}$
4) $\frac{25}{21}$

8) $\int_{-1}^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy \int_{y-x}^{x+y} (x+y+z)dz$

+1) 0
2) 1
3) $\frac{3}{2}$
4) -1

$\iiint\limits_{(V)} \rho \sin\alpha\,\theta d\rho d\varphi d\theta$, где V: 0≤φ≤π/2

0≤ρ≤2
0≤ρ≤π/2

1) -π
+2) π
3) π/2
4) 2π

$\iiint\limits_{(V)} \rho \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$, где V: 0≤φ≤π/2

0≤ρ≤2
0≤θ≤π/2

1) –π
+2) π
3) π/2
4) 2 π

47.Площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми, равна (используя двойной интеграл)

1)$4y=x^2-4x$, $x=y+3$
1)1/3
2)4/3
+3)8/3
4)2

2)$y^2=4x+4$, $y^2=4-4x$
1)11/3
2)5
+3)16/3
4)17/3

3)$y^2=2x+1$, $y^2=1-x$
1)5/3
2)1
+3)4/3
4)1/3

4)$y=x^2+1$, $x+y=3$
1)4
2)7/2
+3)9/2
4)3

48. $\int\limits_{(L)} y ds$, где L-дуга параболы $y^2=2x$ от точки (0,0) до точки (1; $\sqrt{2}$)

+1) $\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$
2)1/3
3) $3\sqrt{3}$
4) $\sqrt{3}-1$

49. $\int\limits_{(l)} (xy - y^2)dx + xdx$, где L- дуга параболы y=2x^2 от точки (0, 0) до точки (1, 2)

1)1/30
2)31/3
+3)31/30
4)31

50. $\int\limits_{(L)} xydx$, где L-дуга синусоиды y=sinx от x=0 до x=π

1) π/2
2)- π
+3) π
4)3

51. $\oint\limits_{(L)} y^2 dx + (x+y)^2 dy$, где L - контур треугольника с вершинами (1; 0); (1; 1); (0; 1)

1)1/3
+2)2/3
3)2
4)-1/3

52. $\oint\limits_{(L)} xy^2 dy - x^2 ydx$, где L-окружность x^2+y^2=1

1)1/2
+2)π/2
3)π
4)π+1

53.Величина градиента поля U=xy+yz+zx в M$_0$(1,1,1) равна:

а) (2;2;2)
б) (-2;2;-2)
в) (-2;-2;-2)

54. Величина градиента поля U=$\ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке M(1;1;-1) равна :

а) $(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3})$

б) $(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{2}{3})$

в) $(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{2}{3})$

55.Величина градиента поля U=$\frac{9(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в точке M(1;-2;-2) равна:

а) (-4;-1;-1)
б) (4;-1;1)
в) (4;1;1)

56. Производная поля U=arctg $\frac{y}{x}$ по направлению вектора $\bar{e} - 3\bar{i} + 4\bar{j}$ в точке A(1;3)) равна:

а) $-\frac{1}{100}$

б) $-\frac{13}{100}$

в) $\frac{1}{100}$

57. Производная поля U=xyz в точке Q(1; -2; 2) по направлению радиуса вектора точки Q равна:

а) $\frac{3}{4}$

б) $\frac{4}{3}$

в) $-\frac{4}{3}$

58.Величина дивергенции векторного поля $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ равна:

а) 3
б) 0
в) -3

59.Циркуляция поля вектора $\bar{r} = x\bar{j}$ вдоль окружности x=a cos t, y=a sin t равна:

а)- πa^2
б) πa^2
в) 3 πa^2

60.Циркуляция поля вектора $\bar{p} = (x-2)\bar{i} + (x+y)\bar{j} - 2z\bar{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами A91; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) равна:

а) $\frac{1}{2}$

б) $\frac{5}{2}$

в)-2

61.Предел $\lim\limits_{y\to 0}\int_1^2 x^3 \cos xy dx$ равен

+а) $\frac{15}{4}$,

б) 0,
в) –1,
г) п.

62. Предел $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 \sqrt[3]{x^4+y^2}\ dx$ равен

$y\to 0$

+а) $\frac{3}{7}$,

б) ∞,

в) 0 ,

г) е.

63. Предел $\underset{y\to 0}{Iim}\int_0^y \frac{In(1+yx)}{x}dx$ равен

+а) 0,

б) 10,

в) - ∞ ,

г) $\frac{\Pi}{2}$.

64. Если функция $\varphi(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, непрерывны в прямоугольнике П=$\{a \le x \le b, c \le y \le d\}$,то функция $Y(y)=\int_a^b \varphi(x,y)dx$ дифференцируема на сегменте $[c,d]$и ее производная $\frac{dY}{dy}$ может быть найдена по формуле…

+а) $\frac{dY}{dy}=\int_a^b \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dx$, б) $\frac{dY}{dy}\int_a^b \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}dx$,

в) $\frac{dY}{dy}=\int_a^b \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial xdy}dx$, г) $\frac{dY}{dy}=d\int_a^b \varphi(x,y)dx$.

65. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике

$\{a \le x \le b, c \le y \le d\}$, а функции $a(y)$ и $b(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.
Тогда функция

$Y(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$ на сегменте $[c,d]$… .

+а) непрерывна,

б) не непрерывна,

в) кусочно-непрерывна,

г) разрывна.

66. Интеграл $\int_0^{+\infty} \cos x^{\alpha} dx$ на множестве $[\alpha_0;+\infty), \alpha_0 > 1$ …

+а) равномерно сходится,
б) сходится,

в) расходится,
г) неравномерно сходится.

67.Интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ на $[-1;1]$ сходится …

+а) неравномерно,
б) равномерно,
в) расходится,
г) сходится.

68. Сумма ряда $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$,полученного разложением функции $y=\begin{cases} 0 при -3<x\le 0 \\ x пnр 0<x<3 \end{cases}$ в ряд Фурье (при х=0) равна:

а) $\frac{8}{\pi^2}$

+б) $\frac{\pi^2}{8}$

в) - π

69. Сумма ряда $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2}$, полученного разложением функции $y=x\cos x$ на $(0,\pi)$ в ряд Фурье (при х=0) равна:

а) $\frac{\pi^2}{8}$

+б) $\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}$

в) $\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{8}$

70.Сумма ряда $\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\frac{1}{5*7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots$, полученного разложением функции $y=(\sin x)$ на $[-\pi,\pi]$ в ряд Фурье (при х=0) равна:

а) $\pi+\frac{1}{2}$

б) π

+в) $\frac{1}{2}$

Критерии формирования оценок по тестовым заданиям:

По итогам выполнения тестовых заданий оценка производится по пятибалльной шкале. При правильных ответах на:

89-100% заданий – «5» (баллов);
70-88% заданий – «4» баллов);
50-69% заданий – «3» (балла);
30-49% заданий – «2» (балла);

10-29% заданий – «1» (балл);
менее 10% заданий – «0» (баллов).

Полный перечень вопросов, выносимых на зачет 1 курс 2 семестр (контролируемые компетенции ОПК-1)

1. Множество действительных чисел. Аксиоматика.
2. Верхние и нижние грани. Система вложенных отрезков.
3. Связь между различными принципами непрерывности.
4. Счетные и несчетные множества.
5. Определение предела последовательности. Свойства пределов.
6. Предел монотонной последовательности. Число e.
7. Подпоследовательности.
8. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий Коши.
9. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями.
10. Понятие функции. Элементарные функции и их классификация.
11. Понятие предела функции. Свойства пределов.
12. Критерий Коши существования конечного предела функции
13. Односторонние пределы. Пределы монотонных функций.
14. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение функций.
15. Непрерывность функции в точке.
16. Предел и непрерывность сложной функции.
17. Односторонняя непрерывность и точки разрыва.
18. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
19. Обратные функции.
20. Показательная функция. Логарифмическая и степенная функция.
21. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.
22. Некоторые замечательные пределы.
23. Производная.
24. Дифференциал.
25. Геометрический смысл производной и дифференциала.
26. Производная обратной функции.
27. Производная сложной функции.
28. Производные и дифференциалы высших порядков.
29. Теорема о среднем. Формула Тейлора.
30. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя.
31. Монотонность и экстремумы функции.
32. Выпуклость и точки перегиба. Асимптоты.
33. Построение графика функции.
34. Комплексные числа.
35. Первообразная и неопределенный интеграл.
36. Методы интегрирования.
37. Интегрирование рациональных дробей.
38. Интегрирование некоторых иррациональных функций.
39. Определенный интеграл. Критерий интегрируемости. Свойства интегрируемых функций.
40. Связь между определенным и неопределенным интегралами.
41. Замена переменной и интегрирование по частям.
42. Приложения определенного интеграла.
43. Несобственные интегралы.

Полный перечень вопросов, выносимых на зачет 2 курс 3 семестр (контролируемые компетенции ОПК-1)

1. Многомерные евклидовы пространства.
2. Открытые и замкнутые множества.
3. Предел функции многих переменных.
4. Функции, непрерывные в точке. Функции, непрерывные на множестве.
5. Частные производные и дифференцируемость функций многих переменных.
6. Геометрический смысл дифференциала функции и частных производных.
7. Дифференцируемость сложной функции.
8. Производная по направлению и градиент.
9. Частные производные высших порядков.
10. Формула Тейлора.
11. Неявные функции, определяемые одним уравнением. Система неявных функций. Дифференцируемые отображения.
12. Локальный экстремум. Условный экстремум.
13. Сходимость числового ряда.
14. Числовые ряды с неотрицательными членами.
15. Абсолютно сходящиеся ряды.
16. Сходящиеся знакопеременные ряды.
17. Последовательности и ряды с комплексными членами.
18. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.
19. Признаки равномерной сходимости рядов.
20. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.
21. Свойства степенных рядов.
22. Аналитические функции.
23. Разложение функции в ряд Тейлора.
24. Функции $e^z, \sin z, \cos z$ комплексного переменного.
25. Определение кратного интеграла и критерий интегрируемости.
26. Свойства кратного интеграла. Сведение кратного интеграла к повторному.
27. Геометрический смысл модуля якобиана отображения.
28. Замена переменных в кратном интеграле.
29. Собственные интегралы, зависящие от параметра.
30. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.
31. Интегралы Эйлера.
32. Криволинейный интеграл первого рода.
33. Криволинейный интеграл второго рода.
34. Формула Грина.
35. Геометрический смысл знака якобиана плоского отображения.
36. Потенциальные векторные поля.

Полный перечень вопросов, выносимых на экзамен 2 курс 4 семестр (контролируемые компетенции ОПК-1)

1. Гладкие поверхности.
2. Касательная плоскость и нормальная прямая.
3. Преобразование параметров гладкой поверхности.
4. Ориентация гладкой поверхности.
5. Первая квадратичная форма гладкой поверхности.
6. Неявно заданные гладкие поверхности.
7. Кусочно гладкие поверхности.
8. Поверхностные интегралы первого рода.
9. Поверхностные интегралы второго рода.
10. Скалярные и векторные поля.
11. Формула Остроградского-Гаусса.

12. Формула Стокса.
13. Потенциальные векторные поля.
14. Определение ряда Фурье и принцип локализации.
15. Сходимость ряда Фурье.
16. Приближение непрерывных функций многочленами.
17. Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов.
18. Скорость стремления к нулю коэффициентов и остатка ряда Фурье.
19. Ряды Фурье $2l$ -периодических функций.
20. Комплексная форма рядов Фурье.
21. Интеграл Фурье.
22. Преобразование Фурье.

Критерии формирования оценок по промежуточной аттестации. Уровень знаний определяется оценками *«отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «зачтено», «неудовлетворительно», «не зачтено».*

1. Оценка *«отлично»* (91-100 баллов) - студент показывает полные и глубокие знания программного материала, логично и аргументировано отвечает на поставленный вопрос, а также дополнительные вопросы, показывает высокий уровень теоретических знаний.

2. Оценка *«хорошо»* (81-90 баллов) - студент показывает глубокие знания программного материала, грамотно его излагает, достаточно полно отвечает на поставленный вопрос и дополнительные вопросы, умело формулирует выводы. В тоже время при ответе допускает несущественные погрешности.

3. Оценка *«удовлетворительно»* (61-80 баллов) - студент показывает достаточные, но не глубокие знания программного материала; при ответе не допускает грубых ошибок или противоречий, однако в формулировании ответа отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами. Для получения правильного ответа требуется уточняющие вопросы.

4. Оценка *«зачтено»* (61-70 баллов) - уровень знаний студента соответствует требованиям, установленным в п. п. 1-3.

5. Оценки *«неудовлетворительно»* и *«не зачтено»* (36-60 баллов) - студент показывает недостаточные знания программного материала, не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускается грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на поставленный вопрос или затрудняется с ответом.