МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино - Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СОГЛАСОВАНО	**УТВЕРЖДАЮ**
Руководитель образовательной программы ________ **М.М. Лафишева**	**Директор института** ________ **Б.И. Кунижев**
«12» 04 **2023г.**	«12» 04 **2023г.**

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ
ДИРЕКЦИЯ
КБГУ

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии
(код и наименование направления подготовки)

«**Проектирование систем искусственного интеллекта**»
(наименование профиля подготовки)

Бакалавр
Квалификация (степень) выпускника

Очная
Форма обучения

Нальчик – 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень компетенций и этапы их формирования

Результаты обучения (компетенции)	Индикаторы достижения компетенции	Освоенные показатели оценки результатов обучения	Виды оценочного материала, обеспечивающий формирование компетенций
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	**ОПК-1.1.** Способен применять базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук	**ОПК-1.1.** З-1. Знает основные понятия, факты, концепции, принципы теорий математических и (или) естественных; базовый математический аппарат, связанный с прикладной математикой и информатикой **ОПК-1.1.** У-1. Умеет применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности к решению конкретных задач **ОПК-1.1.** В-1. Владеет навыками решения задач в профессиональной деятельности на основе фундаментальных знаний, полученных в области математических и (или) естественных наук	Типовые оценочные материалы для устного опроса (п. 5.1.1); типовые оценочные материалы для контрольной работы (п. 5.1.2); типовые оценочные материалы к экзамену (п. 5.2.2.)
	ОПК-1.2. Способен использовать при решении профессиональных задач знания, полученные в области математических и (или) естественных наук	**ОПК-1.2.** З-1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук **ОПК-1.2.** У-1. Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности. **ОПК-1.2.** В-1. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе	

		полученных теоретических знаний	

2. Показатели и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Первый этап (уровень)	**Второй этап (уровень)**	**Третий этап (уровень)**
36-50 баллов	***51-60 баллов***	***61-70 баллов***
На данном уровне обучающийся запоминает и воспроизводит изученный материал. Студент: знает (запоминает и воспроизводит) употребляемые термины; знает конкретные факты; знает методы и процедуры; знает основные понятия; знает правила и принципы.	На данном этапе обучающийся понимает значение изученного материала, может преобразовать материал из одной формы выражения в другую. В качестве показателя понимания может также выступать интерпретация материала студентом (объяснение, краткое изложение) или же предположение о дальнейшем ходе явлений, событий (предсказание последствий, результатов). Обучающийся: понимает факты, правила и принципы; интерпретирует словесный материал, схемы, графики, диаграммы; преобразует словесный материал в математические выражения; предположительно описывает будущие последствия, вытекающие из имеющихся данных.	Этот уровень обозначает умение использовать изученный материал в конкретных условиях и в новых ситуациях. Сюда входят применение правил, методов, понятий, законов, принципов, теорий. Соответствующие результаты обучения требуют более высокого уровня владения материалом, чем понимание. Студент: использует понятия и принципы в новых ситуациях; применяет законы, теории в конкретных практических ситуациях; демонстрирует правильное применение метода или процедуры.

3. Критерии формирования оценок на различных этапах их формирования

Распределение баллов текущего и рубежного контроля

Вид работы	**Трудоемкость, часов / зачетных единиц**	
	5 семестр	**Всего**
Общая трудоемкость (в зачетных единицах)	**108**	**108**
Контактная работа (в часах):	**51**	**30**
Лекции (Л)	*17*	*17*
Практические занятия (ПЗ)	*34*	*34*
Семинарские занятия (СЗ)	-	-
Лабораторные работы (ЛР)	-	-
Самостоятельная работа (в часах), в том числе	**48**	**48**

контактная работа:		
Расчетно-графическое задание	-	-
Реферат (Р)	-	-
Эссе (Э)	-	-
Контрольная работа (КР)	*6*	*6*
Самостоятельное изучение разделов	*42*	*42*
Курсовой проект (КП), курсовая работа (КР)	-	-
Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	9	9
Вид промежуточной аттестации	**Зачёт**	**Зачёт**

Промежуточная аттестация (зачёт)

Семестр	**Шкала оценивания**	
	Незачтено (36-60)	**Зачтено (61-70)**
5	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачёте не ответил ни на один вопрос.	Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете представил полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на оба вопроса. Студенту, имеющему 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, выставляется отметка «зачтено» без сдачи зачёта.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов освоения образовательной программы

Перечень оценочных средств

№	**Наименование оценочного средства**	**Краткая характеристика оценочного средства**	**Представление оценочного средства в фонде**
1.	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2.	Задача (практическое задание)	Средство оценки умения применять полученные теоретические знания в практической ситуации. Задача (задание) должна быть направлена на оценивание тех компетенций, которые подлежат освоению в данной дисциплине, должна	Комплект задач и заданий

		содержать четкую инструкцию по выполнению или алгоритм действий.	
3.	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам
4.	Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Фонд тестовых заданий

Вопросы по темам дисциплины «Функциональный анализ» (контролируемая компетенция ОПК-1)

Тема 1. Введение основных понятий функционального анализа.

1. Возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики.
2. Современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.
3. Множества, алгебра множеств.
4. Счетные множества и множества мощности континуума.

Тема 2. Метрические пространства.

1. Метрики в конкретных пространствах (пространства $C[a;b]$, $C(k)[a;b]$, $Lp[a;b]$), неравенства Гельдера, Коши-Буняковского, Минковского.
2. Эквивалентные метрики; полные метрические пространства, критерий полноты (теорема о вложенных, замкнутых и стягивающихся шарах).
3. Теорема Бэра, теорема о пополнении, компактность и секвенциальная компактность.
4. Эквивалентность счетной и секвенциальной компактности, необходимые условия компактности (замкнутость, полнота, ограниченность), вполне ограниченные множества и критерий компактности Хаусдорфа.
5. Критерий предкомпактности в $C[a,b]$ и в $C(X)$, где $X-$компактное метрическое пространство (теоремы Арцела и Арцела - Асколи).
6. Непрерывные и равномерно непрерывные отображения метрических пространств.
7. Сжимающие отображения и теорема Банаха о сжимающей отображении.

Тема 3. Топологические пространства.

1. Понятие о топологическом пространстве. Основные понятия топологии.
2. Предел и непрерывность в топологическом пространстве.
3. Аксиомы отделимости и счетности, сепарабельность.
4. Компактность: разные виды компактности, критерий компактности, связанный с центрированными множествами.

Тема 4. Линейные топологические и нормированные пространства.

1. Линейные топологические пространства, инвариантность открытости множества относительно операций сложения и умножения на скаляр, поглощающие множества.

2. Топология конечномерного отделимого нормированного пространства
3. Нормированные и евклидовы пространства, как линейные топологические пространства, топология конечномерных нормированных пространств, критерий нормируемости линейных топологических пространств (теорема А.Н. Колмогорова).
4. Выпуклые и абсолютно выпуклые множества.
5. Полунормы и функционал Минковского, локально выпуклые пространства, вид единичного шара в конечномерном нормированном пространстве.
6. Ряды в нормированных пространствах и банаховых пространствах, евклидовы и гильбертовы пространства.
7. Ряд Фурье, экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье.
8. Неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье в гильбертовом пространстве.
9. Ортогональное дополнение, разложение гильбертового пространства в прямую сумму подпространств, существование ортогональной проекции на любое подпространство в гильбертовом пространстве.

Тема 5. Линейные операторы и линейные функционалы в нормированном пространстве.

1. Критерии непрерывности линейного оператора в нормированном пространстве.
2. Норма линейного ограниченного оператора, нормированное пространство линейных ограниченных операторов.
3. Равномерная и поточечная сходимость.
4. Банаховость нормированного пространства линейного ограниченного оператора; принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза) и его следствия;
5. Сопряженное пространство, геометрический смысл нормы линейного непрерывного функционала, сопряженные пространства к l_p, c, c_0 и гильбертовы пространства.
6. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала и ее следствия, дополняемость конечномерных подпространств, теоремы отделимости выпуклых множеств.
7. Слабая сходимость в нормированном пространстве, критерий слабой сходимости, слабая сходимость в l_p.
8. Сопряженный оператор и его норма, дважды сопряженный оператор.
9. Обратный к линейному оператору, соотношение норм исходного оператора и обратного к нему.
10. Теоремы Банаха об открытом отображении, о непрерывности обратного оператора, о замкнутом графике.
11. Достаточные условия непрерывной обратимости линейного ограниченного оператора, обратный оператор к сопряженному.
12. Резольвентное множество, резольвента и ее представление.
13. Спектр и собственные значения линейного оператора, компактность спектра линейного ограниченного оператора.
14. Компактные линейные операторы, равномерный предел компактного линейного оператора, достаточные условия компактности линейных операторов.
15. Компактный линейный оператор в рефлексивных пространствах, компактность сопряженного оператора к компактному линейному оператору.
16. Компактные и самосопряженные линейные операторы в гильбертовом пространстве, спектр самосопряженного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве, норма самосопряженного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве.

Тема 6. Интегральные уравнения.

1. Интегральные операторы в $C[a;b]$ и $L_2[a;b]$, их компактность.
2. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра, условия разрешимости этих уравнений.
3. Сжимаемость некотрой степени интегрального оператора Вольтерра с ограниченным ядром.
4. Использование теоремы Гильберта – Шмидта для нахождения решений интегрального уравнения, нахождение ядра резольвенты к интегральному оператору.
5. Сведение интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Тема 7. Пространства Соболева и обобщенные функции.

1. Применение Теоремы Гильберта – Шмидта к решению уравнений в частных производных, задача Штурма–Лиувилля.
2. Теорема Лакса–Мильграна и ее применение к доказательству разрешимости уравнений в частных производных; пространства Соболева.
3. Характеризация обобщённых производных, теорема о компактном вложении $H_1(a;b)$ в $C[a;b]$.
4. Пространство основных функций D, примеры основных функций, срезающие функции, плотность $D(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, сходимость в пространстве D, непрерывность операторов дифференцирования, умножения и линейной замены переменой в D.
5. Пространство обобщенных функций (распределений) D', регулярные и сингулярные обобщенные функции, сходимость в пространстве D'.
6. Непрерывность операторов дифференцирования и умножения (на бесконечно дифференцируемую функцию) в D'; проблема умножения обобщенных функций, бесконечная дифференцируемость обобщенных функций, наличие первообразной у обобщенных функций, дифференциальные уравнения в D'.
7. Локальные свойства обобщенных функций, носитель обобщенных функций, свертка основной и обобщенной функций, свойства свертки.
8. Фундаментальное решение дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами; пространства S быстро убывающих функций и S' медленно растущих распределений, пространства E и E'.

Тема 8. Элементы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах.

1. Связь между сильной и слабой дифференцируемостью, формула конечных приращений.
2. необходимое условие локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве.
3. Классические задачи вариационного исчисления, уравнение Эйлера.
4. Полилинейные отображения, дифференцируемость, производные и дифференциалы высших порядков отображений в Банаховом пространстве, симметричность оператора второй производной.
5. Формула Тейлора, достаточные условия строгого локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве, условия Лежандра и Якоби.
6. Теорема о неявной функции, условный экстремум вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве и метод множителей Лагранжа.

Критерии формирования оценивания по результатам устного опроса

Устный опрос являются одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Функциональный анализ». Развёрнутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять изучаемые методы при решении практических задач.

В результате знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

Количество баллов	**Критерии оценивания**
3	Обучающийся - полно излагает изученный материал, знает все формулы, применяемые методы и их точность; - понимает материал, может обосновать свои суждения, применить знания при решении практических задач для самостоятельного выполнения; - излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.
2	Обучающийся даёт ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для «3» баллов, но допускает несущественные ошибки, которые сам же исправляет, и некоторые недочёты в последовательности и оформлении излагаемого материала.
1	Обучающийся обнаруживает знание и понимание основного материала по данной теме, но: - излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий, знаний методов, их точности; - не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и применять методы; - излагает материал непоследовательно, допускает ошибки.
0	Обучающийся обнаруживает незнание большей части раздела изучаемого материала, допускает ошибки в формулировке и формулах, при оценке точности методов.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

Практические задания для самостоятельной работы обучающегося (контролируемая компетенция ОПК-1)

Тема 1: Алгебра множеств. Счетные множества. Мощность множества.

1. Дано: а) $A, B \subseteq Z$, $A = \{1;2;5;7;9;11\}$, $B = \{1;4;6;7\}$.
   б) $A, B \subseteq R$, $A = [-3; 7)$, $B = [-4; 4]$.
   Найти: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2. Дано: а) $A,B \subseteq Z$, $A = \{1;7;9;17\}$, $B = \{-2;1;9;10;25\}$.
   б) $A,B \subseteq R$, $A = [4;9)$, $B = [3;7]$.

Найти: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

3. Используя диаграммы Эйлера-Венна доказать тождества:
   1) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
   2) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
   3) $A \cup (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
   4) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus (B \setminus C)$;

5) (A\B) \C = (A\B) ∪ (A∩C);
6) A∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C);
7) (A ∩ B) \ (A ∩ C) = (A ∩ B) \C;

Тема 2: Метрические пространства. Неравенство Гельдера – Минковского.

1. Доказать, что аксиомы метрического пространства эквивалентны следующим: 1) ρ(x, y) = 0 ⇒ x = y; 2) ρ(x, y) ≤ ρ(x, z) + ρ(y, z) ∀ x, y, z ∈ X.

2. Доказать, что для любых элементов x, y, z, t метрического пространства (X, ρ) справедливы неравенства: 1) | ρ(x, z) − ρ(y, z)| ≤ ρ(x, y) (второе неравенство треугольника);
2) | ρ(x, z) − ρ(y, t)| ≤ ρ(x, y) + ρ(z, t) (неравенство четырехугольника).

3. Показать, что в пространстве B_0 неравенство треугольника выполняется в усиленной форме ρ(x, z) ≤ max{ρ(x, y), ρ(y, z)}.

4. Найти расстояние между элементами $x_n = \frac{n+1}{n!}2^{-n}$ *и* $y_n = \frac{1}{n!}2^{-n}$ в пространстве l_2.

5. Найти расстояние между элементами $x(t) = ch(t)$ *и* $y(t) = 1$ в пространстве $L_2[0,2]$.

Тема 3: Принцип сжимающих отображений и его применения. Интегральные уравнения Вольтера и Фредгольма.

1. Пусть f : R → R — дифференцируемая функция. При каком условии на производную оно будет сжимающим?

2. Найти неподвижные точки оператора $Ax(t) = \begin{cases} x''(t) + (\pi^2 + 1)x(t), \\ x(0) = x(1/2),\ x'(0) = 1. \end{cases}$

3. Доказать существование единственное решения неявно заданных функций в $C[0,1]$, если $y(x) + \frac{1}{9}e^x arctg y(x) + f(x) = 0,\ f(x) \in C[0,1]$
при некотором λ, если $y_0(x) \equiv 0.$

4. Найти неподвижные точки оператора $Ax(t) = \begin{cases} x''(t) + 5x(t), \\ x(\pi/2) = 1,\ x'(0) = x'(\pi) \end{cases}$

5. Является ли функция $\varphi(x) = xe^x$ решением интегрального уравнения: $\varphi(x) = e^x \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt$.

***Тема 4:* Линейные топологические и нормированные пространства.**

1. Вычислить интеграл Лебега функции $\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3} - x^2, \text{ когда } x \text{ иррац.точка из } [0;1], \\ x - \ln x, \text{ когда } x \text{ иррац. точка из } [1;e], \\ arctg^2 x, \text{ когда } x \text{ рац. точка из } [0;e]. \end{cases}$

2. Вычислить интеграл Лебега функции $\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3} - x^2, \text{ когда } x \text{ иррац.точка из } [0;1], \\ x - \ln x, \text{ когда } x \text{ иррац. точка из } [1;e], \\ arctg^2 x, \text{ когда } x \text{ рац. точка из } [0;e]. \end{cases}$

3. Вычислить интеграл Лебега функции $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - \cos x, \text{ если } x \text{ иррац. из } [0;\pi] \\ x^2 - x, \text{ когда } x \text{ иррац из } [\pi;2\pi] \\ x^2 + x, \text{ когда } x \text{ иррац из } [0;2\pi] \end{cases}$.

4. Вычислить норму $\|x(t)\|$ элемента $x(t) = t^3 - 6t$ в пространстве $L_1[-2;2]$.

5. Выяснить, можно ли в пространстве X под нормой элемента $x \in X$ понимать число $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le n} \left(3^{-k} |x_k|\right)$?

Тема 5: **Линейные операторы и линейные функционалы в нормированном пространстве.**

1. Вычислить норму $\|x(t)\|$ элемента $x(t) = t^3 - 6t$ в пространстве $L_1[-2;2]$.

2. Выяснить, можно ли в пространстве X под нормой элемента $x \in X$ понимать число $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le n} \left(3^{-k} |x_k|\right)$?

3. Найти норму интегрального оператора с непрерывным ядром $y(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds$, рассматривая его как оператор, отображающий $C[0,1]$ в $C[0,1]$.

4. Пусть $X = C[0,1]$ и $Ax = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$, а A-ограниченный линейный оператор. Найти $A^{-1}y$.

Тема 6: **Интегральные уравнения.**

1. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения $\varphi(x) = \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt + x.$
2. Найти решение интегрального уравнения с вырожденным ядром: $\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \left(t^2 + 2tx\right)\varphi(t)dt + x^2.$
3. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения: $\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \left(2xt^2 + 2tx^2\right)\varphi(t)dt.$
4. Является ли функция $\varphi(x) = xe^x$ решением интегрального уравнения: $\varphi(x) = e^x \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt$.
5. С помощью преобразования Лапласа найти решение интегрального уравнения $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt.$
6. Решить интегральное уравнение Абеля: $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}} = x - \sqrt{x}.$

Тема 7: **Пространства Соболева и обобщенные функции.**

1. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения: $\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \left(2xt^2 + 2tx^2\right)\varphi(t)dt.$
2. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения: $\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \left(t^2 + 2tx\right)\varphi(t)dt + x^2.$

Тема 8: **Элементы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах.**

1. С помощью преобразования Лапласа, найти решение краевой задачи: $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.
2. Найти производную Фреше отображения $F : R^3 \to R^2 : y_1 = tg(x_2) + ctg(x_3);\quad y_2 = \sin(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_2)\cos(x_3)$ в точке $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right)$.
3. Свести к интегральному уравнению краевую задачу: $y''(x) - y(x) = 0$, $y(0) = 1, y(1) = 0$.

Методические рекомендации по решению задач.

Приступая к решению задач, необходимо внимательно изучить теоретический материал по темам, разобрать приводимые в теоретическом материале каждой темы примеры. При выполнении заданий используются формулы и методы, представленные по каждой теме.

Критерии формирования оценивания по заданиям для самостоятельной работы студента (типовые задачи)

Самостоятельное выполнение заданий на практических занятиях являются одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Функциональный анализ».

В результате знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

Количество баллов	**Критерии оценивания**
3	Обучающийся - показал глубокие знания материала по поставленным вопросам, грамотно, логично его излагает, свободно использует необходимые формулы при решении задач; - знает все формулы, применяемые методы и их точность; - может применять знания при решении прикладных задач для самостоятельного выполнения.
2	Обучающийся - даёт ответ, удовлетворяющий требованиям; - твердо знает материал, грамотно его излагает, не допускает существенных неточностей в процессе решения задач; - сам исправляет свои несущественные ошибки и некоторые недочёты.
1	Обучающийся обнаруживает знание и понимание основного материала по поставленным вопросам, но не усвоил его деталей, допускает отдельные неточности при решении задач.
0	Обучающийся допускает грубые ошибки в ответе на поставленные вопросы и при решении задач.

Оценочные материалы для контрольной работы
(контролируемая компетенция ОПК-1)

Образцы контрольных заданий

1. Понятие сходящихся последовательностей в топологическом пространстве. Сильная сходимость.
2. Доказать, что пересечение конечного числа топологических пространств – есть топологическое пространство.
3. Найти расстояние между элементами $x_n = \frac{n+1}{n!}2^{-n}$ и $y_n = \frac{1}{n!}2^{-n}$ в пространстве l_2.

4. Найти неподвижные точки оператора $Ax(t)=\begin{cases} x''(t)+(\pi^2+1)x(t), \\ x(0)=x(1/2),\ x'(0)=1. \end{cases}$

5. Вычислить интеграл Лебега функции $f(x)=\dfrac{(-1)^{[x]}}{[x]+2}$ на интервале $(0,+\infty)$.

6. Найти расстояние между элементами $x_n=\dfrac{n+4}{n}2^{-n}$ $и$ $y_n=\dfrac{1}{n}2^{2-n}$ в пространстве l_2.

7. Найти неподвижные точки оператора $Ax(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi^2}x''(t), \\ x(0)=x(1),\ x'(0)=1. \end{cases}$

8. Вычислить интеграл Лебега функции $\varphi(x)=\begin{cases} \sqrt{x^3}-x^2,\ когда\ \ x\ иррац.точка\ из\ [0;1], \\ x-\ln x,\ когда\ \ x\ иррац.\ точка\ из\ [1;e], \\ arctg^2 x,\quad когда\ \ x\ рац.\ точка\ из\ [0;e]. \end{cases}$

9. Найти неподвижные точки оператора $Ax(t)=\begin{cases} x''(t)+5x(t), \\ x(\pi/2)=1,\ x'(0)=x'(\pi) \end{cases}$

10. Вычислить интеграл Лебега функции $f(x)=\dfrac{(-1)^{[x]}}{([x]+1)^2}$ на интервале $(0,+\infty)$.

11. Найти расстояние между элементами $x(t)=ch(t)$ $и$ $y(t)=1$ в пространстве $L_2[0,2]$.

12. Выяснить, можно ли в пространстве X под нормой элемента $x\in X$ понимать число $\|x\|=\max\limits_{1\le k\le n}\left(3^{-k}|x_k|\right)$?

13. Найти неподвижные точки оператора $Ax(t)=\begin{cases} x''(t)-8x(t), \\ x(1/3)=1,\ x'(0)=0 \end{cases}$

14. Вычислить интеграл Лебега функции $\varphi(x)=\begin{cases} x^2-\cos x,\ если\ \ x\ иррац.\ из\ [0;\pi] \\ x^2-x,\ когда\ \ x\ иррац\ из\ [\pi;2\pi] \\ x^2+x,\ когда\ \ x\ иррац\ из\ [0;2\pi] \end{cases}$.

15. Вычислить норму $\|x(t)\|$ элемента $x(t)=t^3-6t$ в пространстве $L_1[-2;2]$.

16. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения $\varphi(x)=\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt+x.$

17. Найти производную Фреше отображения $F:R^3\to R^2: y_1=tg(x_2)+ctg(x_3);\quad y_2=\sin(x_1)\cos(x_2)-\sin(x_2)\cos(x_3)$ в точке $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{6}\right)$.

18. Найти резольвенту ядра $K(x,t)=\dfrac{x+1}{1+t}$ для интегрального уравнения Вольтера.

19. Свести к интегральному уравнению краевую задачу: $y''(x)-y(x)=0,\ y(0)=1, y(1)=0.$

20. Найти решение интегрального уравнения с вырожденным ядром: $\varphi(x)=\lambda\int_0^1(t^2+2tx)\varphi(t)dt+x^2.$

21. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения: $\varphi(x)=\lambda\int_0^1(2xt^2+2tx^2)\varphi(t)dt.$

22. Найти преобразование Фурье функции $f(x)=\begin{cases} x^2+x,\quad при\ \ x\in[-1;2], \\ 0,\qquad при\ \ x\notin[-1;2]. \end{cases}$

23. С помощью преобразования Лапласа найти решение интегрального уравнения $\varphi(x) = x^2 + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt.$
24. Является ли функция $\varphi(x) = xe^x$ решением интегрального уравнения: $\varphi(x) = e^x \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt$.
25. С помощью преобразования Лапласа найти решение интегрального уравнения $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)dt.$
26. Решить интегральное уравнение Абеля: $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}} = x - \sqrt{x}.$
27. С помощью преобразования Лапласа, найти решение краевой задачи: $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.
28. Найти резольвенту ядра $K(x,t) = \frac{x^2}{t^2}$ для интегрального уравнения Вольтерра.

Критерии формирования оценок по контрольной работе

Процент правильных ответов	**Количество баллов**
более 91 %	10
81–90 %	9
71–80 %	8
61–70 %	7
51–60 %	6
41–50 %	5
31–40 %	4
21–30 %	3
11–20 %	2
6–10%	1
менее 6 %	0

Оценочные материалы для компьютерного тестирования (контролируемая компетенция ОПК-1)

1. Множество называется счетным, если его элементы можно взаимно однозначно сопоставить со всеми:
   -: действительными числами
   -: комплексными числами
   +: натуральными числами
   -: иррациональными числами
2. Множество всех целых чисел является:
   +: счетным
   -: несчетным
   -: конечным
   -: пустым
3. Множество M, лежащее в метрическом пространстве R называется замкнутым, если:
   +: [M] = M
   -: [M] $\neq$ M
   -: [M] = 2M
   -: [M] = $\varnothing$

4. Множество всех целых положительных чисел является:
   -: несчетным
   -: конечным
   +: счетным
   -: степенью числа 2
5. Определенное правило или закон, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие определенный элемент $y \in Y$, называется:
   -: функционалом
   -: функцией
   +: оператором
   -: последовательностью
6. Пересечение любого конечного числа открытых множеств есть:
   -: замкнутое множество
   +: открытое множество
   -: пустое множество
   -: пустое множество
7. Множество всех рациональных чисел, принадлежащих сегменту $[0;1]$, является:
   -: несчетным
   +: счетным
   -: конечным
   -: пустым
8. Пересечение любого числа замкнутых множеств есть:
   +: замкнутое множество
   -: открытое множество
   -: пустое множество
   -: счетное множество
9. Если в пространстве X всякая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства, то это пространство:
   -: рефлексивно
   -: биективно
   +: полно
   -: линейно
10. Пустое множество имеет меру:
   -: 1
   -: $\frac{1}{2}$
   -: 2
   +: 0
11. Мерой интервала (a,b) является:
   -: $a + b$
   -: $\frac{a+b}{2}$
   +: $b - a$
   -: $\frac{b-a}{2}$
12. Если каждому элементу $a \in A$ по некоторому закону ставится в соответствие единственный элемент $b \in B$, причем различным элементам множества A отвечают различные элементы множества B, то говорят, что между множествами A и B установлено:
   +: Взаимно – однозначное соответствие

-: Съюрективное соответствие
-: Инъективное соответствие
-: Простое соответствие
13. Верно равенство:
-: A\(B\C) = A\ B U A
-: A\ (B\ C) = A\B ∩ A
+: A\ (B\ C) = (A\ B) U (A ∩ C)
-: A\ (B\ C) = A U C
14. Верно равенство:
-: A\ (B\C) = A\ B U A
-: A\ (B\ C) = A\ B ∩ A
-: A\(B\C) = A U C
+: A\ (B\C)= (A\ C)\ (B\ C)
15. Верно равенство:
+: (A\ B) ∩ C = (A ∩ C)\ (B ∩ C)
-: (A\ B) ∩ C = A ∩ C
-: (A\B) ∩ C = B ∩ C
-: (A\ B) ∩ C = (A ∩ C) ∩ B
16. Функцией взаимно однозначно отображающей отрезок [0; 1] на отрезок [10; 11] является:
-: y = x + 5
-: y = x + 7
-: y = x - 1
+: y = x + 10
17. Функцией взаимно однозначно отображающей отрезок [-5; 5] на отрезок [-30; 30] является функция:
-: y = x + 6
-: y = 6/ x
-: y = x/ 6
+: y = 6x
18. Функцией взаимно однозначно отображающей интервал [0; 1] на всю числовую прямую является:
+: y = ctg (π x+π)
-: y = tg πx
-: y = ctg x
-: y = arctg x
19. Функцией взаимно однозначно отображающей интервал (0; 1) → (-∞; ∞) является:
-: y = tg x
-: $y = tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
+: $y = tg\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$
-: $y = tg\,\frac{\pi x}{2}$
20. Функцией взаимно однозначно отображающей числовую прямую на интервал (a; b) является:
-: $y = arctg\,\frac{x}{a}$
+: $y = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{\pi} arctg\, x$

-: $y = a + \frac{b}{\pi} arc\ tg\ x$

-: $y = b + arctg\ \frac{x}{a}$

21. Функцией взаимно однозначно отображающей интервал (0; 1) $\to$ (0; 1) является:
    -: y = tg x
    -: $y = tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
    -: $y = tg\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$
    +: $y = tg\,\frac{\pi x}{4}$
22. Функцией взаимно однозначно отображающей интервал (0; π) $\to$ (-1; 1) является:
    -: y=sin x
    +: y=cos x
    -: y=tg x
    -: y=ctg x
23. Функцией взаимно однозначно отображающей интервал (-π/2; π/2) $\to$ (-1; 1) является:
    +: y=sin x
    -: y=cos x
    -: y=tg x
    -: y=ctg x
24. Числовая прямая образует метрическое пространство, если в качестве расстояния принять:
    -: $\rho(x, y) = x - y$
    -: $\rho(x, y) = x^{1/2} - y^{1/2}$
    -: $\rho(x, y) = \sqrt{x^3 - y^3}$
    +: ρ (x, y) = |x – y|

25. Евклидово 2-мерное пространство R^2 носителем которого является множество всевозможных упорядоченных наборов из n чисел является метрическим пространством, если за расстояние принять:
    +: $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
    -: $\rho(x, y) = x_i - y_i$
    -: $\rho(x, y) = \sqrt{\left(x_1^2 - y_1^2\right) + \left(x_2^2 - y_2^2\right)}$
    -: $\rho(x, y) = (x_i^3 - y_i^3)^{1/3}$
26. Евклидово n-мерное пространство R^n носителем которого является множество всевозможных упорядоченных наборов из n чисел является метрическим пространством, если за расстояние принять:
    +: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

-: $\rho(x,y)=x_i+y_i$

-: $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-y_i^2)}$

-: $\rho(x,y)=(x_i^3-y_i^3)^{1/3}$

27. Множество всех непрерывных действительных функций $C[a,b]$, определенных на сегменте [a b] является метрическим пространством, если за расстояние принять число:

-: ρ (x, y) = x (t) - y(t)

+: ρ (x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ |x (t) - y(t)|

-: ρ (x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ |x (t) + y(t)|

-: ρ (x, y) = x^2 (t) - y^2 (t)

28. Множество всех непрерывно дифференцируемых действительных функций $C^1[a,b]$, определенных на сегменте [a; b] является метрическим пространством, если за расстояние принять число:

-: ρ (x, y) = $x^{/}$ (t) – $y^{/}$(t)

+: ρ (x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ (|x (t) - y(t)|, |$x^{/}$ (t) – $y^{/}$ (t)|)

-: ρ (x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ |x (t) - y(t)|

-: ρ (x, y) = x^2 (t) - y^2 (t)

29. В пространстве C[a; b] расстояние определяется по формуле:

-: ρ (x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ |x (t) + y(t)|

-: ρ (x, y) = x (t) + y (t)

+: ρ (x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ |x (t) - y(t)|

-: ρ (x, y) = x^2 (t) - y^2 (t)

30. Пространство X будет метрическим, если::

+: $\rho(x,y)=\int_0^1 2^t\,|x(t)-y(t)|\,dt$

-: $\rho(x,y)=\int_0^1 \left|e^{x(t)}-e^{y(t)}\right|dt$:

-: $\rho(x,y)=\int_0^1 \left|x^2(t)-y^2(t)\right|dt$

-: $\rho(x,y)=\int_0^1 2^{x(t)}\,|x(t)-y(t)|\,dt$

Раздел 1 (3 рейтинговая точка)

31. Расстояние между элементами $\sin t$ и $\cos^2 t$ в метрическом пространстве $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ равно:

-: 0

+: 1

-: 1,5
-: 2

32. Расстояние между элементами $\sin t$ и $\cos t$ в метрическом пространстве $L_2\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ равно:
-: 0
-: 1
-: π
+: $\sqrt{\pi}$

33. Расстояние между элементами $x(t)=t$ и $y(t)=t^2$ в метрическом пространстве $L_1[0;2]$ равно:
-: 0
+: 1
-: 3
-: 2,5

34. Расстояние между элементами $x_n=\frac{2^n+1}{3^n}$ и $y_n=\frac{1}{3^n}$ в метрическом пространстве l_1 равно:
+: 2
-: 1
-: ∞
-: $\sqrt{2}$

35. Расстояние между элементами $x_n=\frac{(-2)^n+1}{3^n}$ и $y_n=\frac{1}{3^n}$ в метрическом пространстве l_1 равно:
+: 2
-: -0,4
-: ∞
-: 0,4

36. Расстояние между элементами $x_n=\frac{(-2)^n+1}{n!}$ и $y_n=\frac{1}{n!}$ в метрическом пространстве l_1 равно:
-: e^{-2}
+: e^2-1
-: ∞
-: $e^{-2}-1$

37. Расстояние в $L_1[0,2]$ между элементами $x(t)=2t-1$, $y(t)=t-2$ равно:
-: 1
-: 2
+: 4
-: 5

38. Расстояние в $L_1[0,2]$ между элементами $x(t)=2t$, $y(t)=2$ равно:
-: 0
-: 2
-: 4
-: 6

39. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i$, $i = 1,2,\ldots$ имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ для любой последовательности $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l_2$, если выполнено условие:

+: $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < 1$

-: $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = 1$

-: $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 > 1$

-: $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \geq 1$

40. При каких λ отображение $A : C[0,1] \to C[0,1]$, действующее по формуле $Ax(t) = \lambda x(t^{\beta})$, $\beta \geq 0$ является сжимающим

-: $\lambda = 1$

-: $\lambda > 1$

-: $|\lambda| < 1$

-: $|\lambda| > 1$

41. В полном метрическом пространстве любая последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю:

+: имеют общую точку

-: не имеют общих точек

-: образуют открытое множество

-: образуют множество бесконечной меры

42. Отображение A пространства R в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число $\alpha<1$, что для любых двух точек x, $y \in R$ выполняется неравенство:

-: $\rho(Ax, Ay) > \alpha \rho(x, y)$

-: $\rho(Ax, Ay) \geq \alpha \rho(x, y)$

-: $\rho(Ax, Ay) = \alpha \rho(x, y)$

+: $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$

43. Отображение $A\varphi = x + \lambda \int_0^1 t\varphi(t)dt$ будет сжимающим, при условии, что:

-: $|\lambda| \leq 1$

-: $|\lambda| \leq 1/3$

+: $|\lambda| \leq 1/\sqrt{3}$

-: λ – любое число

44. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i ,$$ $i = 1, 2\ldots$ имеет единственное решение $x=(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$, для любой последовательности $b=(b_1, b_2, \ldots) \in \ell_1$, если выполнено условие:

-: $\sum_{i,j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^2 > 1$

-: $\sum_{i,j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^2 = 1$

-: $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right| > 1$

+: $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right| < 1$

45. Отображение $A\varphi = x + \lambda\int_0^1 t^2\varphi(t)dt$ будет сжимающим, при условии, что:

-: $|\lambda| \le 1$

-: $|\lambda| \le 1/5$

+: $|\lambda| \le 1/\sqrt{5}$

-: λ – любое число

46. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 - 3x$ будут точки:

-: $0;3$

+: $0;4$

-: $-2;\ 2$

-: $-\sqrt{3};\ 3$

47. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 + x - 3$ будут точки:

-: $0;3$

-: $0;4$

-: $-2;\ 2$

+: $-\sqrt{3};\ 3$

48. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 + x - 4$ будут точки:

-: $0;3$

-: $0;4$

+: $-2;\ 2$

-: $-\sqrt{3};\ 3$

49. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 - 2x$ будут точки:

+: $0;3$

-: $0;1$

-: $-2;2$

-: $-\sqrt{3};3$

50. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 - x - 3$ будут точки:

+: $-1;3$

-: $1;4$

-: $-2; 2$

-: $-\sqrt{13}; \sqrt{13}$

51. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 - x + 1$ будут точки:

-: 1; 3
+: 1
-: -1; 1
-: $-\sqrt{3};\ \sqrt{3}$

52. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 - 4x + 4$ будут точки:

-: 2
+: 1; 4
-: -1; 1
-: $-\sqrt{3};\ 2$

53. Первое приближение решения интегрального уравнения $\varphi(x) = \int_0^x xt\,\varphi(t)\,dt + x$, $\varphi_0(x) = x$, будет равна

-: $\varphi_1(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{2} + x$

-: $\varphi_1(x) = \dfrac{x^3}{2} + x$

-: $\varphi_1(x) = \dfrac{x^4}{4} + x$

+: $\varphi_1(x) = \dfrac{x^4}{3} + x$

54. Первое приближение решения интегрального уравнения $\varphi(x) = \int_0^1 xt\,\varphi(t)\,dt + x$, $\varphi_0(x) = x$, будет равна

-: $\varphi_1(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$

-: $\varphi_1(x) = \dfrac{x^2}{3} + x$

-: $\varphi_1(x) = \dfrac{5x}{4}$

+: $\varphi_1(x) = \dfrac{4x}{3}$

55. Первое приближение решения интегрального уравнения $\varphi(x) = \int_1^e \ln t\,\varphi(t)\,dt + x$, $\varphi_0(x) = x$, будет равна

-: $\varphi_1(x) = \dfrac{e^2 - 1}{4}$

-: $\varphi_1(x) = 2x$

-: $\varphi_1(x)=\dfrac{e^2+1}{2}$

+: $\varphi_1(x)=\dfrac{e^2+1}{4}$

56. Первое приближение решения интегрального уравнения $\varphi(x)=\int\limits_0^x t^2\varphi(t)dt+x$, $\varphi_0(x)=x$, будет равна

-: $\varphi_1(x)=\dfrac{x^4}{3}+1$

-: $\varphi_1(x)=\dfrac{x^4}{3}+x$

-: $\varphi_1(x)=\dfrac{x^3}{3}+x$

+: $\varphi_1(x)=\dfrac{x^4}{4}+x$

57. Первое приближение решения интегрального уравнения $\varphi(x)=\int\limits_0^1 e^t\varphi(t)dt+x$, $\varphi_0(x)=x$, будет равна

-: $\varphi_1(x)=xe$

-: $\varphi_1(x)=x(e+2)$

+: $\varphi_1(x)=1+x$

-: $\varphi_1(x)=e(1+x)$

58. Первое приближение решения интегрального уравнения $\varphi(x)=\int\limits_0^1 e^t\,\varphi(t)\,dt+x$, $\varphi_0(x)=1$, будет равна

-: $\varphi_1(x)=xe$

+: $\varphi_1(x)=e$

-: $\varphi_1(x)=1+e$

-: $\varphi_1(x)=1-e$

59. Второе приближение решения интегрального уравнения $\varphi(x)=\int\limits_0^x (x+t)\varphi(t)dt+1$, $\varphi_0(x)=1$, будет равна

-: $\varphi_2(x)=\dfrac{x^3+x^2}{2}+1$

-: $\varphi_2(x)=\dfrac{5x^2}{8}+1$

+: $\varphi_2(x)=\dfrac{7x^4+12x^2}{8}+1$

-: $\varphi_2(x)=\dfrac{5x^3}{6}+x$

60. Второе приближение решения интегрального уравнения $\varphi(x)=\int\limits_0^x (x+t)^2\ \varphi(t)\,dt+1$, $\varphi_0(x)=0$, будет равна

-: $\varphi_2(x)=\dfrac{7x^3+5x^2}{2}+1$

-: $\varphi_2(x)=\dfrac{5x^2}{4}+1$

+: $\varphi_2(x)=\dfrac{7x^3}{3}+1$

-: $\varphi_2(x)=\dfrac{5x^3}{6}+x$

61. Пусть A_1 и A_2 - два ограниченных открытых множества. Если $A_1\subset A_2$, то:
+: $\mu(A_1)\le\mu(A_2)$
-: $\mu(A_1)=\mu(A_2)$
-: $\mu(A_1)>\mu(A_2)$
-: $\mu(A_1)\ge\mu(A_2)$

62. Всякая функция, заданная на множестве меры нуль:
-: неизмерима
-: непрерывна
+: равна нулю
-: равна ∞

63. Если открытое ограниченное множество A является суммой конечного числа или счетного множества взаимно не налегающих открытых множеств $A=\sum\limits_k A_k$, то:

-: $\mu(A)<\sum\limits_k \mu(A_k)$

-: $\mu(A)\le\sum\limits_k \mu(A_k)$

+: $\mu(A)=\sum\limits_k \mu(A_k)$

-: $\mu(A)\ge\sum\limits_k \mu(A_k)$

64. Если $f(x)$ и $g(x)-$есть измеримые функции, заданные на множестве E, то их разность $f(x)-g(x)$:
-: не измерима
-: имеет меру нуль
+: измерима
-: имеет меру 1

65. Мера суммы конечного числа попарно не пересекающихся сегментов равна:
+: сумме длин этих сегментов
-: разности длин этих сегментов
-: полусумме длин этих сегментов
-: полуразности длин этих сегментов

66. Пусть множество E на отрезке [0; 1] имеет меру нуль, тогда замыкание $\overline{E}$ имеет меру:
+: 0
-: 1

-: $\frac{1}{2}$

-: $\frac{3}{4}$

67. Если $f(x)$ - суммируемая на множестве А функция, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого $e \subset A$ такого, что $\mu(e) < \delta$ верно:

-: $\int_A f(x) d\mu < \varepsilon$

-: $\int_A f(x) d\mu > \varepsilon$

+: $\left| \int_A f(x) d\mu \right| < \varepsilon$

-: $\left| \int_A f(x) d\mu \right| > \varepsilon$

68. Если $f(x)$ и $g(x)$ – есть измеримые функции, заданные на множестве E, то их сумма $f(x) + g(x)$:

-: не измерима

-: имеет меру нуль

+: измерима

-: имеет меру 1

69. Интеграл Лебега по интервалу (0; ∞) от функции $3^{-[x]}$, равен:

-: 1

-: 2

-: 3

+: 1,5

70. Интеграл Лебега по интервалу (0; ∞) от функции $2^{-[x]}$, равен:

-: 1

+: 2

-: 3

-: 1,5

71. Интеграл Лебега на отрезке [0; 1] от функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{в рациональных точках} \\ -x^2, & \text{в иррациональных точках} \end{cases}$$ равен:

-: 0

-: $\frac{2}{3}$

-: $\frac{1}{3}$

+: $-\frac{1}{3}$

72. Интеграл Лебега на множестве [0; 1] от функции $f(x)$ равной x^2 во всех точках пересечения канторова множества и некоторого множества E и равной x^3 в остальных точках отрезка [0; 1] равен:

-: 0
+: 025
-: 0,5
-: $\frac{1}{3}$

73. Интеграл Лебега от функции $f(x)=\begin{cases} x^2, \textit{для } x \textit{ иррациональных, больших чем } \frac{1}{3} \\ x^3, \textit{для } x \textit{ иррациональных, меньших чем } \frac{1}{3} \\ 0, \quad \textit{в рациональныхточках точках} \end{cases}$

на отрезке [0;1] равен:
-: $\frac{7}{108}$
-: $\frac{5}{108}$
+: $\frac{35}{108}$
-: 0

74. Вычислить $\int\limits_{[0;1]} f(x)d\mu$, если $f(x)=\begin{cases} \sin \pi x, & \textit{для } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \cap СД \\ \cos \pi x, & \textit{для } x \in \left[\frac{1}{2},1\right] \cap СД \\ x^2, & \textit{для} \quad x \in Д \end{cases}$

где Д – канторово множество, а СД – его дополнение до всего отрезка [0; 1].
+: 0
-: $\frac{1}{\pi}$
-: 0,5
-: $\frac{1}{3}$

75. Интеграл Лебега $\int\limits_{[0;1]} f(x)d\mu$, если $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \textit{для } x \textit{ иррациональных} \\ x^3+\sqrt{x}, & \textit{для } x \textit{ рациональных} \end{cases}$ равен:
-: 0
-: 1
-: $\frac{11}{12}$
+: 2

76. Числовая прямая образует нормированное пространство, если в качестве расстояния принять:
-: $\| x \| = x$
-: $\| x \| = x^{1/2}$
-: $\| x \| = \sqrt{x^3}$
+: $\| x \|$ = |x |

77. Евклидово 2-мерное пространство R^2, носителем которого является множество всевозможных упорядоченных наборов из n чисел, является нормированным пространством, если за норму принять:

-: $\|x\| = \sqrt{x_1 + x_2}$

-: $\|x\| = x_1 + x_2$

+: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

-: $\|x\| = (x_1^3 + x_2^3)^{1/3}$

78. В пространстве C[a; b] норма определяется по формуле:

+: $\|x\| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$

-: $\|x\| = x(t)$

-: $\|x\| = \max\limits_{a \le t \le b} |\sqrt{x(t)}|$

-: $\|x\| = x^2(t)$

79. В пространстве сходящихся с квадратом последовательностей ℓ_2 норма определяется по формуле:

+: $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k)^2}$

-: $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x_k)^2}$

-: $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k)^2$

-: $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x_k)^2$

80. Пространство X будет нормированным, если::

+: $\|x\| = \int\limits_0^1 2^t |x(t)| dt$

-: $\|x\| = \int\limits_0^1 \left|e^{x(t)}\right| dt$:

-: $\|x\| = \int\limits_0^1 \left|x^2(t)\right| dt$

-: $\|x\| = \int\limits_0^1 2^{x(t)} |x(t)| dt$

81. Пространство X будет нормированным, если:

+: $\|x\| = \int\limits_0^1 e^t |x(t)| dt$

-: $\|x\| = \int\limits_0^1 \left|e^{x(t)}\right| dt$:

-: $\|x\| = \int\limits_0^1 \left|x^2(t)\right| dt$

-: $\| x \| = \int_0^1 e^{x(t)} |x(t)| dt$

82. Пространство ℓ_p, $p \geq 1$, числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ будет нормированным, если за норму принять число:

+: $\| x \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$

-: $\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$

-: $\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$

-: $\| x \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{\frac{1}{p}} \right)^p$

83. Пространство X будет нормированным, если:

+: $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 2^k (x_k)^2}$

-: $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (-2)^k (x_k)^2}$

-: $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{x_k} (x_k)^2}$

-: $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 (1 - x_k)^2}$

84. Норма элемента $x_n = \frac{3^{n-1}}{4^n}$ в пространстве l_1 равна:

+: 1

-: 4

-: $\frac{4}{3}$

-: ∞

85. Норма элемента $x(t) = 3t - t^3$ в пространстве $C[-2; 2]$ равна:

-: -2

+: 2

-: 0

-: 14

86. Норма элемента $x(t) = \ln t - t$ в пространстве $C[0{,}1; e]$ равна:

+: $e - 1$

-: $1 - e$

-: $0{,}1 + \ln 10$

-: 1

87. Норма элемента $x_n = \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$ в пространстве l_1 равна:

-: 1

+: e^5

-: $\frac{1}{5}$

-: ∞

88. Норма элемента $x(t) = t^3 \ln t$ в пространстве $L_1[1, e]$ равна:

+: $\frac{3e^4+1}{16}$

-: $\frac{3e^4+1}{4}$

-: $\frac{3e^4-1}{16}$

-: $\frac{3e^4-1}{4}$

89. Норма элемента $x(t) = t\cos t$ в пространстве $L_1\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ равна:

-: $\pi + 2$

-: π

+: $\frac{\pi}{2} - 1$

-: $\frac{\pi}{2} + 1$

90. Норма элемента $x(t) = \sin \pi t$ в пространстве $L_2[0, 2]$ равна:

+: 1

-: $\frac{1}{\pi}$

-: $\sqrt{2}$

-: $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

Перечень вопросов, выносимых на зачёт (контролируемая компетенция ОПК-1)

1. Аксиомы метрического пространства.
2. Неравенства Коши–Буняковского, Минковского, Юнга, Гёлдера.
3. Полные метрические пространства.
4. Пополнение метрических пространств.
5. Принцип сжимающих отображений.
6. Метод последовательных приближений.
7. Метод последовательных приближений для системы линейных алгебраических уравнений.
8. Теорема существования и единственности для задачи Коши.
9. Теорема существования и единственности для интегрального уравнения Вольтерра.

10. Теорема существования и единственности для интегрального уравнения Фредгольма.
11. Топологические пространства, основные определения.
12. Сравнение топологий.
13. Сепарабельные топологические пространства, основные определения.
14. Непрерывные отображения.
15. Аксиома отделимости Хаусдорфовые пространства.
16. Понятия компактности.
17. Компактность в метрических пространствах.
18. Предкомпактные множества.
19. Теория меры. Кольцо и алгебра множеств. Элементарные множества.
20. Лебегова мера плоских множеств.
21. Общее понятие меры.
22. Измеримые функции. Действия над измеримыми функциями.
23. Сходимость по мере.
24. Интеграл Лебега. Простые функции.
25. Свойства интеграла Лебега.
26. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.
27. Теорема Фубини.
28. Линейные пространства. Определения и примеры.
29. Линейные функционалы.
30. Выпуклые функционалы.
31. Нормированные пространства.
32. Евклидовы пространства.
33. Существование ортогональных базисов, ортогонализация.
34. Неравенства Бесселя.
35. Полные евклидовые пространства. Теорема Рисса–Фишера.
36. Гильбертово пространство.
37. Непрерывные линейные функционалы в линейных нормированных пространствах.
38. Определение сопряженного пространства.
39. Сильная топология в сопряженном пространстве.
40. Слабая топология и слабая сходимость.
41. Обобщенные функции.
42. Действия над обобщенными функциями.
43. Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций.
44. Линейные операторы, определения и примеры.
45. Непрерывность и ограниченность.
46. Сумма и произведение операторов.
47. Обратный оператор, обратимость.
48. Сопряженные операторы.
49. Самосопряженные операторы.
50. Спектр оператора.
51. Резольвента.
52. Компактные операторы.
53. Неограниченные операторы в нормированных пространствах.

В результате знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

Сумма баллов текущего и рубежного контроля	**Сумма баллов на зачете**	**Общая сумма баллов**	**Оценка**
≥61	-	61	зачет (без сдачи)
36-60	0	36-60	незачет

36-60	25-1	61	зачет
<36	-	-	недопуск