Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ОПОП
_____________ М.С. Нирова
«12» апреля 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»
(код и наименование дисциплины)

Программа специалитета
01.05.01 Фундаментальные математика и механика
(код и наименование программы специалитета)

Направленность (профиль)
Фундаментальная математика
(наименование направленности (профиля))

Квалификация (степень) выпускника
специалист

Форма обучения
очная

Нальчик 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы, описание показателей, критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Карта компетенции

Шифр и название компетенций: *умение ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории (ПКС-1).*

Индикаторы достижения компетенции ПКС-1:

ПКС-1.1. Способен обрабатывать, анализировать и осуществлять сбор информации по заданной тематике.

ПКС-1.2. Способен формулировать математические знания с учетом уровня слушателей.

Общая характеристика компетенции

Тип компетенции: профессиональная компетенция выпускника образовательной программы по направлению специалитета 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, уровень ВО- специалитет.

1.1. Этапы формирования компетенций и средства оценивания

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины	**Индикаторы достижения компетенции**	**Основные показатели оценки результатов обучения**	**Вид оценочного средства**
ПКС-1. Умение ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории.	**ПКС-1.1.** Способен обрабатывать, анализировать и осуществлять сбор информации по заданной тематике. **ПКС-1.2.** Способен формулировать математические знания с учетом уровня слушателей**.**	**Знать: -** постановки классических задач математики, - основные известные научные результаты, соответствующие профилю подготовки; - перспективные научные направления в профильной предметной области. **Уметь: -** математически корректно ставить задачи, известные научные результаты, - планировать цели и устанавливать приоритеты при решении конкретных задач с учетом условий, средств, личностных возможностей,	Оценочные материалы для практических занятий. Оценочные материалы для коллоквиума. Оценочные материалы для проведения тестирования. Оценочные материалы для промежуточной аттестации

		- ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории. **Владеть:** - различными формами представления знаний и научных результатов; - методами решения классических задач математики.	

1.2. Критерии формирования оценок на различных этапах их формирования

Текущий и рубежный контроль

Этап (уровень)	Первый этап (уровень)	Второй этап (уровень)	Третий этап (уровень)
Баллы	36-50 баллов	51-60 баллов	61-70 баллов
Характеристика	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Частичное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценку «удовлетворительно».	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «хорошо».	Полное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических занятий. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «отлично».

На первом (начальном) этапе формирования компетенции формируются знания, умения и навыки, составляющие базовую основу компетенции, без которой невозможно ее дальнейшее развитие. Обучающийся воспроизводит термины, факты, методы, понятия, принципы и правила; решает учебные задачи по образцу.

На втором (основном) этапе формирования компетенции приобретается опыт деятельности, когда отдельные компоненты компетенции начинают «работать» в комплексе и происходит выработка индивидуального алгоритма продуктивных действий, направленных на достижение поставленной цели.

На этом этапе обучающийся осваивает аналитические действия с предметными знаниями по конкретной дисциплине, способен самостоятельно решать учебные задачи, внося коррективы в алгоритм действий, осуществляя координирование хода работы, переносит знания и умения на новые условия.

Третий (завершающий) этап – это овладение компетенцией. Обучающийся способен использовать знания, умения, навыки при решении задач повышенной сложности и в нестандартных условиях. По результатам этого этапа обучающийся демонстрирует итоговый уровень сформированности компетенции.

Промежуточная аттестация (зачет)

Оценка	**Незачтено**	**Зачтено**
Баллы	**36-60**	**61-70**
Характеристика	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачёте не ответил ни на один вопрос.	Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете представил полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на оба вопроса. Студенту, имеющему 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, выставляется отметка «зачтено» без сдачи зачёта.

Промежуточная аттестация (экзамен)

Оценка	**Удовлетворительно**	**Хорошо**	**Отлично**
Баллы	**61 – 80**	**81 – 90**	**91 – 100**
Характеристика	Знает отдельные перспективные задачи в соответствующем научном направлении Неуверенно докладывает известные результаты в данной предметной области Готов изложить свои результаты в письменной форме	Может указать некоторые научные направления, представляющие теоретический и практический интерес Хорошо представляет известные научные результаты по профилю подготовки Может устно и письменно изложить свои результаты	Хорошо ориентируется в современных научных направлениях, соответствующих профильной предметной области Доказательно и аргументировано представляет собственные и известные научные результаты в данной предметной области Убедительно и аргументировано излагает свои собственные результаты, как в устной, так и в письменной форме

2. Методические материалы и типовые контрольные задания, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Перечень оценочных средств

№	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
1.	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2.	Задача (практическое задание)	Средство оценки умения применять полученные теоретические знания в практической ситуации. Задача (задание) должна быть направлена на оценивание тех компетенций, которые подлежат освоению в данной дисциплине, должна содержать четкую инструкцию по выполнению или алгоритм действий.	Комплект задач и заданий
3.	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам
4.	Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Фонд тестовых заданий

3. Перечень контрольных заданий и иных материалов, необходимых для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности

3.1. Вопросы по темам дисциплины «Функциональный анализ» (контролируемая компетенция ПКС-1)

Тема 1. Введение основных понятий функционального анализа.

1. Возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики.
2. Современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.
3. Множества, алгебра множеств.
4. Счетные множества и множества мощности континуума.

Тема 2. Метрические пространства.

1. Метрики в конкретных пространствах (пространства $C[a;b]$, $C(k)[a;b]$, $Lp[a;b]$), неравенства Гельдера, Коши-Буняковского, Минковского.
2. Эквивалентные метрики; полные метрические пространства, критерий полноты (теорема о вложенных, замкнутых и стягивающихся шарах).
3. Теорема Бэра, теорема о пополнении, компактность и секвенциальная компактность.
4. Эквивалентность счетной и секвенциальной компактности, необходимые условия компактности (замкнутость, полнота, ограниченность), вполне ограниченные множества и критерий компактности Хаусдорфа.
5. Критерий предкомпактности в $C[a,b]$ и в $C(X)$, где $X -$ компактное метрическое пространство (теоремы Арцела и Арцела - Асколи).
6. Непрерывные и равномерно непрерывные отображения метрических пространств.
7. Сжимающие отображения и теорема Банаха о сжимающей отображении.

Тема 3. Топологические пространства.

1. Понятие о топологическом пространстве. Основные понятия топологии.
2. Предел и непрерывность в топологическом пространстве.
3. Аксиомы отделимости и счетности, сепарабельность.
4. Компактность: разные виды компактности, критерий компактности, связанный с центрированными множествами.

Тема 4. Линейные топологические и нормированные пространства.

1. Линейные топологические пространства, инвариантность открытости множества относительно операций сложения и умножения на скаляр, поглощающие множества.
2. Топология конечномерного отделимого нормированного пространства
3. Нормированные и евклидовы пространства, как линейные топологические пространства, топология конечномерных нормированных пространств, критерий нормируемости линейных топологических пространств (теорема А.Н. Колмогорова).
4. Выпуклые и абсолютно выпуклые множества.
5. Полунормы и функционал Минковского, локально выпуклые пространства, вид единичного шара в конечномерном нормированном пространстве.
6. Ряды в нормированных пространствах и банаховых пространствах, евклидовы и гильбертовы пространства.
7. Ряд Фурье, экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье.
8. Неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье в гильбертовом пространстве.
9. Ортогональное дополнение, разложение гильбертового пространства в прямую сумму подпространств, существование ортогональной проекции на любое подпространство в гильбертовом пространстве.

Тема 5. Линейные операторы и линейные функционалы в нормированном пространстве.

1. Критерии непрерывности линейного оператора в нормированном пространстве.
2. Норма линейного ограниченного оператора, нормированное пространство линейных ограниченных операторов.
3. Равномерная и поточечная сходимость.
4. Банаховость нормированного пространства линейного ограниченного оператора; принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза) и его следствия;

5. Сопряженное пространство, геометрический смысл нормы линейного непрерывного функционала, сопряженные пространства к l_p, c, c_0 и гильбертовы пространства.
6. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала и ее следствия, дополняемость конечномерных подпространств, теоремы отделимости выпуклых множеств.
7. Слабая сходимость в нормированном пространстве, критерий слабой сходимости, слабая сходимость в l_p.
8. Сопряженный оператор и его норма, дважды сопряженный оператор.
9. Обратный к линейному оператору, соотношение норм исходного оператора и обратного к нему.
10. Теоремы Банаха об открытом отображении, о непрерывности обратного оператора, о замкнутом графике.
11. Достаточные условия непрерывной обратимости линейного ограниченного оператора, обратный оператор к сопряженному.
12. Резольвентное множество, резольвента и ее представление.
13. Спектр и собственные значения линейного оператора, компактность спектра линейного ограниченного оператора.
14. Компактные линейные операторы, равномерный предел компактного линейного оператора, достаточные условия компактности линейных операторов.
15. Компактный линейный оператор в рефлексивных пространствах, компактность сопряженного оператора к компактному линейному оператору.
16. Компактные и самосопряженные линейные операторы в гильбертовом пространстве, спектр самосопряженного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве, норма самосопряженного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве.

Тема 6. Интегральные уравнения.

1. Интегральные операторы в $C[a;b]$ и $L_2[a;b]$, их компактность.
2. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра, условия разрешимости этих уравнений.
3. Сжимаемость некотрой степени интегрального оператора Вольтерра с ограниченным ядром.
4. Использование теоремы Гильберта – Шмидта для нахождения решений интегрального уравнения, нахождение ядра резольвенты к интегральному оператору.
5. Сведение интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Тема 7. Пространства Соболева и обобщенные функции.

1. Применение Теоремы Гильберта – Шмидта к решению уравнений в частных производных, задача Штурма–Лиувилля.
2. Теорема Лакса–Мильграна и ее применение к доказательству разрешимости уравнений в частных производных; пространства Соболева.
3. Характеризация обобщённых производных, теорема о компактном вложении $H_1(a;b)$ в $C[a;b]$.
4. Пространство основных функций D, примеры основных функций, срезающие функции, плотность $D(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, сходимость в пространстве D, непрерывность операторов дифференцирования, умножения и линейной замены переменой в D.
5. Пространство обобщенных функций (распределений) D , регулярные и сингулярные обобщенные функции, сходимость в пространстве D .
6. Непрерывность операторов дифференцирования и умножения (на бесконечно дифференцируемую функцию) в D ; проблема умножения обобщенных функций,

бесконечная дифференцируемость обобщенных функций, наличие первообразной у обобщенных функций, дифференциальные уравнения в D .
7. Локальные свойства обобщенных функций, носитель обобщенных функций, свертка основной и обобщенной функций, свойства свертки.
8. Фундаментальное решение дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами; пространства S быстро убывающих функций и S медленно растущих распределений, пространства E и E .

Тема 8. Элементы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах.

1. Связь между сильной и слабой дифференцируемостью, формула конечных приращений.
2. необходимое условие локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве.
3. Классические задачи вариационного исчисления, уравнение Эйлера.
4. Полилинейные отображения, дифференцируемость, производные и дифференциалы высших порядков отображений в Банаховом пространстве, симметричность оператора второй производной.
5. Формула Тейлора, достаточные условия строгого локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве, условия Лежандра и Якоби.
6. Теорема о неявной функции, условный экстремум вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве и метод множителей Лагранжа.

Критерии формирования оценивания по результатам устного опроса

Устный опрос являются одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Функциональный анализ». Развёрнутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять изучаемые методы при решении практических задач.

В результате знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

Количество баллов	**Критерии оценивания**
3	Обучающийся - полно излагает изученный материал, знает все формулы, применяемые методы и их точность; - понимает материал, может обосновать свои суждения, применить знания при решении практических задач для самостоятельного выполнения; - излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.
2	Обучающийся даёт ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для «3» баллов, но допускает несущественные ошибки, которые сам же исправляет, и некоторые недочёты в последовательности и оформлении излагаемого материала.
1	Обучающийся обнаруживает знание и понимание основного материала по данной теме, но: - излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий, знаний методов, их точности; - не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и применять методы; - излагает материал непоследовательно, допускает ошибки.
0	Обучающийся обнаруживает незнание большей части раздела изучаемого

	материала, допускает ошибки в формулировке и формулах, при оценке точности методов.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

3.2 Практические задания для самостоятельной работы обучающегося (контролируемая компетенция ПКС-1)

Тема 1: Алгебра множеств. Счетные множества. Мощность множества.

1. Дано: а) $A, B \subseteq Z$, $A = \{1;2;5;7;9;11\}$, $B = \{1;4;6;7\}$.
   б) $A, B \subseteq R$, $A = [-3; 7)$, $B = [-4; 4]$.
   Найти: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.

2. Дано: а)$A,B \subseteq Z$, $A = \{1;7;9;17\}$, $B = \{-2;1;9;10;25\}$.
   б) $A,B \subseteq R$, $A = [4;9)$, $B = [3;7]$.

Найти: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.

3. Используя диаграммы Эйлера-Венна доказать тождества:
   1) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;
   2) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;
   3) $A \cup (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$;
   4) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash B) \backslash (B \backslash C)$;
   5) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;
   6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   7) $(A \cap B) \backslash (A \cap C) = (A \cap B) \backslash C$;

Тема 2: Метрические пространства. Неравенство Гельдера – Минковского.

1. Доказать, что аксиомы метрического пространства эквивалентны следующим: 1) $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$; 2) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(y, z)$ $\forall$ $x, y, z \in X$.
2. Доказать, что для любых элементов x, y, z, t метрического пространства (X, ρ) справедливы неравенства: 1) $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \le \rho(x, y)$ (второе неравенство треугольника);
   2) $|\rho(x, z) - \rho(y, t)| \le \rho(x, y) + \rho(z, t)$ (неравенство четырехугольника).
3. Показать, что в пространстве B_0 неравенство треугольника выполняется в усиленной форме $\rho(x, z) \le \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$.
4. Найти расстояние между элементами $x_n = \frac{n+1}{n!} 2^{-n}$ и $y_n = \frac{1}{n!} 2^{-n}$ в пространстве l_2.
5. Найти расстояние между элементами $x(t) = \mathrm{ch}(t)$ и $y(t) = 1$ в пространстве $L_2[0, 2]$.

Тема 3: Принцип сжимающих отображений и его применения. Интегральные уравнения Вольтера и Фредгольма.

1. Пусть $f : R \to R$ — дифференцируемая функция. При каком условии на производную оно будет сжимающим?
2. Найти неподвижные точки оператора $Ax(t) = \{x''(t) + (\pi^2 + 1)x(t), |$
3. Доказать существование единственное решения неявно заданных функций в $C[0,1]$, если $y(x) + \frac{1}{9}e^x \mathrm{arctg} y(x) + f(x) = 0, f(x) \in C[0,1]$

при некотором λ, если $y_0(x) \equiv 0$.

4. Найти неподвижные точки оператора $Ax(t) = \{x''(t) + 5x(t), |$
5. Является ли функция $\phi(x) = x\, e^x$ решением интегрального уравнения: $\phi(x) = e^x \sin x + 2 \int \cos(x - t)\, \phi(t)\, dt$.

Тема 4: **Линейные топологические и нормированные пространства.**

1. Вычислить интеграл Лебега функции $\phi(x) = \{\sqrt{x^3} - x^2$, когда x иррац. точка из $[0;\ 1], |\quad \{x - \ln x$, когда x иррац. точка из $[1;\ e], |$
2. Вычислить интеграл Лебега функции $\phi(x) = \{\sqrt{x^3} - x^2$, когда x иррац. точка из $[0;\ 1], |\quad \{x - \ln x$, когда x иррац. точка из $[1;\ e], |$
3. Вычислить интеграл Лебега функции $\phi(x) = \{x^2 - \cos x$, если x иррац. из $[0;\ \pi]|\quad \{x^2 - x$, когда x иррац из $[\pi;\ 2\pi]|$
4. Вычислить норму $\|x(t)\|$ элемента $x(t) = t^3 - 6t$ в пространстве $L_1[-2;\ 2]$.
5. Выяснить, можно ли в пространстве X под нормой элемента $x \in X$ понимать число $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le n} \left(3^{-k}\, |x_k|\right)$?

Тема 5: **Линейные операторы и линейные функционалы в нормированном пространстве.**

1. Вычислить норму $\|x(t)\|$ элемента $x(t) = t^3 - 6t$ в пространстве $L_1[-2;\ 2]$.
2. Выяснить, можно ли в пространстве X под нормой элемента $x \in X$ понимать число $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le n} \left(3^{-k}\, |x_k|\right)$?
3. Найти норму интегрального оператора с непрерывным ядром $y(t) = \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\mathrm{ds}$, рассматривая его как оператор, отображающий $C[0,1]$в $C[0,1]$.
4. Пусть $X = C[0,1]$и $\mathrm{Ax} = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$, а A-ограниченный линейный оператор. Найти $A^{-1}y$.

Тема 6: **Интегральные уравнения.**

1. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения $\phi(x) = \int\ e^{x-t}\phi(t)\ \mathrm{dt} + x$.
2. Найти решение интегрального уравнения с вырожденным ядром: $\phi(x) = \lambda \int\ (t^2 + 2\mathrm{tx})\, \phi(t)\ \mathrm{dt} + x^2$.
3. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения: $\phi(x) = \lambda \int\ (2\mathrm{xt}^2 + 2\mathrm{tx}^2)\, \phi(t)\ \mathrm{dt}$.
4. Является ли функция $\phi(x) = x\, e^x$ решением интегрального уравнения: $\phi(x) =\ e^x \sin x + 2 \int\ \cos(x - t)\, \phi(t)\ \mathrm{dt}$.
5. С помощью преобразования Лапласа найти решение интегрального уравнения $\phi(x) = 1 + x + \int\ (x - t)^2 \phi(t)\ \mathrm{dt}$.
6. Решить интегральное уравнение Абеля: $\int_0^x \frac{\phi(t)\ \mathrm{dt}}{\sqrt{x-t}} = x - \sqrt{x}$.

Тема 7: **Пространства Соболева и обобщенные функции.**

1. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения: $\phi(x) = \lambda \int\ (2\mathrm{xt}^2 + 2\mathrm{tx}^2)\, \phi(t)\ \mathrm{dt}$.
2. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения: $\phi(x) = \lambda \int\ (t^2 + 2\mathrm{tx})\, \phi(t)\ \mathrm{dt} + x^2$.

Тема 8: **Элементы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах.**

1. С помощью преобразования Лапласа, найти решение краевой задачи: $u_{\mathrm{tt}} = u_{\mathrm{xx}}, u(x,0) = \sin x, u_t(x,0) = 0, u(0,t) = 0, u(1,t) = 0$.
2. Найти производную Фреше отображения $F: R^3 \to R^2$: $y_1 = \mathrm{tg}(x_2) + \mathrm{ctg}(x_3)$; $y_2 = \sin(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_2)\cos(x_3)$ в точке $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{6}\right)$.

3. Свести к интегральному уравнению краевую задачу: $y''(x) - y(x) = 0, y(0) = 1, y(1) = 0$.

Методические рекомендации по решению задач.

Приступая к решению задач, необходимо внимательно изучить теоретический материал по темам, разобрать приводимые в теоретическом материале каждой темы примеры. При выполнении заданий используются формулы и методы, представленные по каждой теме.

Критерии формирования оценивания по заданиям для самостоятельной работы студента (типовые задачи)

Самостоятельное выполнение заданий на практических занятиях являются одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Функциональный анализ».

В результате знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

Количество баллов	**Критерии оценивания**
3	Обучающийся - показал глубокие знания материала по поставленным вопросам, грамотно, логично его излагает, свободно использует необходимые формулы при решении задач; - знает все формулы, применяемые методы и их точность; - может применять знания при решении прикладных задач для самостоятельного выполнения.
2	Обучающийся - даёт ответ, удовлетворяющий требованиям; - твердо знает материал, грамотно его излагает, не допускает существенных неточностей в процессе решения задач; - сам исправляет свои несущественные ошибки и некоторые недочёты.
1	Обучающийся обнаруживает знание и понимание основного материала по поставленным вопросам, но не усвоил его деталей, допускает отдельные неточности при решении задач.
0	Обучающийся допускает грубые ошибки в ответе на поставленные вопросы и при решении задач.

3.3. Оценочные материалы для контрольной работы (контролируемая компетенция ПКС-1).

Образцы контрольных заданий

1. Понятие сходящихся последовательностей в топологическом пространстве. Сильная сходимость.
2. Доказать, что пересечение конечного числа топологических пространств – есть топологическое пространство.
3. Найти расстояние между элементами $x_n = \frac{n+1}{n!}\,2^{-n}$ и $y_n = \frac{1}{n!}\,2^{-n}$ в пространстве l_2.
4. Найти неподвижные точки оператора $\mathrm{A}x(t) = \{x''(t) + (\pi^2 + 1)x(t), |$
5. Вычислить интеграл Лебега функции $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{[x]+2}$ на интервале $(0, +\infty)$.
6. Найти расстояние между элементами $x_n = \frac{n+4}{n}\,2^{-n}$ и $y_n = \frac{1}{n}\,2^{2-n}$ в пространстве l_2.
7. Найти неподвижные точки оператора $\mathrm{A}x(t) = \left\{-\frac{1}{4\pi^2}x''(t), \right|$
8. Вычислить интеграл Лебега функции $\phi(x) =$
$\left\{\sqrt{x^3} - x^2, \text{когда } x \text{ иррац. точка из } [0;\ 1], \right| \quad \{x - \ln x, \text{когда } x \text{ иррац. точка из } [1;\ e], |$

9. Найти неподвижные точки оператора $\mathrm{Ax}(t) = \{x''(t) + 5x(t), |$
10. Вычислить интеграл Лебега функции $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{([x]+1)^2}$ на интервале $(0, +\infty)$.
11. Найти расстояние между элементами $x(t) = \mathrm{ch}(t)$ и $y(t) = 1$ в пространстве $L_2[0, 2]$.
12. Выяснить, можно ли в пространстве X под нормой элемента $x \in X$ понимать число $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le n} \left(3^{-k} |x_k|\right)$?
13. Найти неподвижные точки оператора $\mathrm{Ax}(t) = \{x''(t) - 8x(t), |$
14. Вычислить интеграл Лебега функции $\phi(x) = \{x^2 - \cos x,$ если x иррац. из $[0;\ \pi]|| \quad \{x^2 - x,$ когда x иррац из $[\pi;\ 2\pi]|$
15. Вычислить норму $\|x(t)\|$ элемента $x(t) = t^3 - 6t$ в пространстве $L_1[-2;\ 2]$.
16. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения $\phi(x) = \int e^{x-t} \phi(t)\, \mathrm{dt} + x$.
17. Найти производную Фреше отображения $F: R^3 \to R^2$: $y_1 = \mathrm{tg}(x_2) + \mathrm{ctg}(x_3)$; $y_2 = \sin(x_1) \cos(x_2) - \sin(x_2) \cos(x_3)$
в точке $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right)$.
18. Найти резольвенту ядра $K(x, t) = \frac{x+1}{1+t}$ для интегрального уравнения Вольтера.
19. Свести к интегральному уравнению краевую задачу: $y''(x) - y(x) = 0, y(0) = 1, y(1) = 0$.
20. Найти решение интегрального уравнения с вырожденным ядром: $\phi(x) = \lambda \int (t^2 + 2\mathrm{tx})\, \phi(t)\, \mathrm{dt} + x^2$.
21. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения: $\phi(x) = \lambda \int (2\mathrm{xt}^2 + 2\mathrm{tx}^2)\, \phi(t)\, \mathrm{dt}$.
22. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \{x^2 + x,$ при $x \in [-1;\ 2], |$
23. С помощью преобразования Лапласа найти решение интегрального уравнения $\phi(x) = x^2 + \int e^{x-t} \phi(t)\, \mathrm{dt}$.
24. Является ли функция $\phi(x) = x\, e^x$ решением интегрального уравнения: $\phi(x) = e^x \sin x + 2 \int \cos(x - t)\, \phi(t)\, \mathrm{dt}$.
25. С помощью преобразования Лапласа найти решение интегрального уравнения $\phi(x) = 1 + x + \int (x - t)^2 \phi(t)\, \mathrm{dt}$.
26. Решить интегральное уравнение Абеля: $\int_0^x \frac{\phi(t)\, \mathrm{dt}}{\sqrt{x-t}} = x - \sqrt{x}$.
27. С помощью преобразования Лапласа, найти решение краевой задачи: $u_{\mathrm{tt}} = u_{\mathrm{xx}}, u(x, 0) = \sin x, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$.
28. Найти резольвенту ядра $K(x, t) = \frac{x^2}{t^2}$ для интегрального уравнения Вольтерра.

Критерии формирования оценок по контрольной работе

Процент правильных ответов	**Количество баллов**
более 91 %	10
81–90 %	9
71–80 %	8
61–70 %	7
51–60 %	6
41–50 %	5
31–40 %	4
21–30 %	3
11–20 %	2
6–10%	1
менее 6 %	0

3.4. Оценочные материалы для компьютерного тестирования (контролируемая компетенция ПКС-1)

1. Множество называется счетным, если его элементы можно взаимно однозначно сопоставить со всеми:
   -: действительными числами
   -: комплексными числами
   +: натуральными числами
   -: иррациональными числами
2. Множество всех целых чисел является:
   +: счетным
   -: несчетным
   -: конечным
   -: пустым
3. Множество M, лежащее в метрическом пространстве R называется замкнутым, если:
   +: [M] = M
   -: [M] ≠ M
   -: [M] = 2M
   -: [M] = ∅
4. Множество всех целых положительных чисел является:
   -: несчетным
   -: конечным
   +: счетным
   -: степенью числа 2
5. Определенное правило или закон, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие определенный элемент $y \in Y$, называется:
   -: функционалом
   -: функцией
   +: оператором
   -: последовательностью
6. Пересечение любого конечного числа открытых множеств есть:
   -: замкнутое множество
   +: открытое множество
   -: пустое множество
   -: пустое множество
7. Множество всех рациональных чисел, принадлежащих сегменту $[0\,;\,1]$, является:
   -: несчетным
   +: счетным
   -: конечным
   -: пустым
8. Пересечение любого числа замкнутых множеств есть:
   +: замкнутое множество
   -: открытое множество
   -: пустое множество
   -: счетное множество
9. Если в пространстве X всякая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства, то это пространство:
   -: рефлексивно
   -: биективно
   +: полно
   -: линейно
10. Пустое множество имеет меру:
    -: 1
    -: $\frac{1}{2}$

-: 2

+: 0

11. Мерой интервала (a, b) является:

-: $a + b$

-: $\frac{a+b}{2}$

+: $b - a$

-: $\frac{b-a}{2}$

12. Если каждому элементу $a \in A$ по некоторому закону ставится в соответствие единственный элемент $b \in B$, причем различным элементам множества A отвечают различные элементы множества B, то говорят, что между множествами A и B установлено:

+: Взаимно – однозначное соответствие

-: Съюрективное соответствие

-: Инъективное соответствие

-: Простое соответствие

13. Верно равенство:

-: A\(B\C) = A\ B U A

-: A\ (B\ C) = A\B ∩ A

+: A\ (B\ C) = (A\ B) U (A ∩ C)

-: A\ (B\ C) = A U C

14. Верно равенство:

-: A\ (B\C) = A\ B U A

-: A\ (B\ C) = A\ B ∩ A

-: A\(B\C) = A U C

+: A\ (B\C)= (A\ C)\ (B\ C)

15. Верно равенство:

+: (A\ B) ∩ C = (A ∩ C)\ (B ∩ C)

-: (A\ B) ∩ C = A ∩ C

-: (A\B) ∩ C = B ∩ C

-: (A\ B) ∩ C = (A ∩ C) ∩ B

16. Функцией взаимно однозначно отображающей отрезок [0; 1] на отрезок [10; 11] является:

-: y = x + 5

-: y = x + 7

-: y = x - 1

+: y = x + 10

17. Функцией взаимно однозначно отображающей отрезок [-5; 5] на отрезок [-30; 30] является функция:

-: y = x + 6

-: y = 6/ x

-: y = x/ 6

+: y = 6x

18. Функцией взаимно однозначно отображающей интервал [0; 1] на всю числовую прямую является:

+: y = ctg (π x+π)

-: y = tg πx

-: y = ctg x

-: y = arctg x

19. Функцией взаимно однозначно отображающей интервал (0; 1) → (-∞; ∞) является:

-: y = tg x

-: $y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

+: $y = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$
-: $y = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$

20. Функцией взаимно однозначно отображающей числовую прямую на интервал (a; b) является:
-: $y = arctg\frac{x}{a}$
+: $y = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{\pi}\operatorname{arctg} x$
-: $y = a + \frac{b}{\pi} arc\ tg\ x$
-: $y = b + \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

21. Функцией взаимно однозначно отображающей интервал (0; 1) $\to$ (0; 1) является:
-: y = tg x
-: $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
-: $y = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$
+: $y = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$

22. Функцией взаимно однозначно отображающей интервал (0; π) $\to$ (-1; 1) является:
-: y=sin x
+: y=cos x
-: y=tg x
-: y=ctg x

23. Функцией взаимно однозначно отображающей интервал (-π/2; π/2) $\to$ (-1; 1) является:
+: y=sin x
-: y=cos x
-: y=tg x
-: y=ctg x

24. Числовая прямая образует метрическое пространство, если в качестве расстояния принять:
-: $\rho(x, y) = x - y$
-: $\rho(x, y) = x^{1/2} - y^{1/2}$
-: $\rho(x, y) = \sqrt{x^3 - y^3}$
+: ρ(x, y) = |x – y|

25. Евклидово 2-мерное пространство R^2 носителем которого является множество всевозможных упорядоченных наборов из n чисел является метрическим пространством, если за расстояние принять:
+: $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
-: $\rho(x, y) = x_i - y_i$
-: $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1^2 - y_1^2) + (x_2^2 - y_2^2)}$
-: $\rho(x, y) = (x_i^3 - y_i^3)^{13}$

26. Евклидово n-мерное пространство R^n носителем которого является множество всевозможных упорядоченных наборов из n чисел является метрическим пространством, если за расстояние принять:
+: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$
-: $\rho(x, y) = x_i + y_i$
-: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - y_i^2)}$
-: $\rho(x, y) = (x_i^3 - y_i^3)^{13}$

27. Множество всех непрерывных действительных функций $C[a\,,b]$, определенных на сегменте [a b] является метрическим пространством, если за расстояние принять число:
-: ρ(x, y) = x (t) - y(t)
+: ρ(x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ |x (t) - y(t)|
-: ρ(x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ |x (t) + y(t)|
-: ρ(x, y) = x^2 (t) - y^2 (t)
28. Множество всех непрерывно дифференцируемых действительных функций $C^1[a\,,b]$, определенных на сегменте [a; b] является метрическим пространством, если за расстояние принять число:
-: ρ(x, y) = x' (t) – y'(t)
+: ρ(x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ (|x (t) - y(t)|, |x' (t) – y' (t)|)
-: ρ(x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ |x (t) - y(t)|
-: ρ(x, y) = x^2 (t) - y^2 (t)
29. В пространстве C[a; b] расстояние определяется по формуле:
-: ρ(x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ |x (t) + y(t)|
-: ρ (x, y) = x (t) + y (t)
+: ρ (x, y) = $\max\limits_{a\le t\le b}$ |x (t) - y(t)|
-: ρ (x, y) = x^2 (t) - y^2 (t)
30. Пространство X будет метрическим, если::
+: $\rho(x,y)=\int_0^1 2^t\,|x(t)-y(t)|$ dt
-: $\rho(x,y)=\int_0^1 \left|e^{x(t)}-e^{y(t)}\right|$ dt:
-: $\rho(x,y)=\int_0^1 |x^2(t)-y^2(t)|$ dt
-: $\rho(x,y)=\int_0^1 2^{x(t)}\,|x(t)-y(t)|$ dt

Раздел 1 (3 рейтинговая точка)

31. Расстояние между элементами $\sin t$ и $\cos^2 t$ в метрическом пространстве $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ равно:
-: 0
+: 1
-: 1,5
-: 2
32. Расстояние между элементами $\sin t$ и $\cos t$ в метрическом пространстве $L_2\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ равно:
-: 0
-: 1
-: π
+: $\sqrt{\pi}$
33. Расстояние между элементами $x(t)=t$ и $y(t)=t^2$ в метрическом пространстве $L_1[0;\,2]$ равно:
-: 0
+: 1
-: 3
-: 2,5
34. Расстояние между элементами $x_n=\frac{2^n+1}{3^n}$ и $y_n=\frac{1}{3^n}$ в метрическом пространстве l_1 равно:
+: 2
-: 1

-: ∞
-: $\sqrt{2}$
35. Расстояние между элементами $x_n = \frac{(-2)^n+1}{3^n}$ и $y_n = \frac{1}{3^n}$ в метрическом пространстве l_1 равно:
+: 2
-: -0,4
-: ∞
-: 0,4
36. Расстояние между элементами $x_n = \frac{(-2)^n+1}{n!}$ и $y_n = \frac{1}{n!}$ в метрическом пространстве l_1 равно:
-: e^{-2}
+: $e^{2} - 1$
-: ∞
-: $e^{-2} - 1$
37. Расстояние в $L_1[0,2]$ между элементами $x(t) = 2t - 1$, $y(t) = t - 2$ равно:
-: 1
-: 2
+: 4
-: 5
38. Расстояние в $L_1[0,2]$ между элементами $x(t) = 2t$, $y(t) = 2$ равно:
-: 0
-: 2
-: 4
-: 6
39. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{\text{ij}} x_j + b_i$, $i = 1,2,\ldots$ имеет единственное решение $x = (x_1, x_2,\ldots) \in l_2$ для любой последовательности $b = (b_1, b_2,\ldots) \in l_2$, если выполнено условие:
+: $\sum_{i,j=1}^{\infty} \left|a_{\text{ij}}\right|^2 < 1$
-: $\sum_{i,j=1}^{\infty} \left|a_{\text{ij}}\right|^2 = 1$
-: $\sum_{i,j=1}^{\infty} \left|a_{\text{ij}}\right|^2 > 1$
-: $\sum_{i,j=1}^{\infty} \left|a_{\text{ij}}\right|^2 \geq 1$
40. При каких λ отображение $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующее по формуле $\text{Ax}(t) = \lambda x\left(t^{\beta}\right), \beta \geq 0$ является сжимающим
-: $\lambda = 1$
-: $\lambda > 1$
-: $|\lambda| < 1$
-: $|\lambda| > 1$
41. В полном метрическом пространстве любая последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю:
+: имеют общую точку
-: не имеют общих точек
-: образуют открытое множество
-: образуют множество бесконечной меры
42. Отображение A пространства R в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число α<1, что для любых двух точек x, y∈R выполняется неравенство:
-: ρ (Ax, Ay) > α ρ (x, y)
-: ρ (Ax, Ay) ≥ α ρ (x, y)
-: $\rho(\text{Ax}, \text{Ay}) = \alpha\rho(x, y)$
+: ρ (Ax, Ay) α ρ (x, y)

43. Отображение $A\phi = x + \lambda \int_0^1 t\, \phi(t)$ dt будет сжимающим, при условии, что:
-: $|\lambda| \leq 1$
-: $|\lambda| \leq 1/3$
+: $|\lambda| \leq 1/\sqrt{3}$
-: λ $-$любое число
44. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{\text{ij}} x_j + b_i$, $i = 1, 2 \dots$ имеет единственное решение x=(x_1, x_2, …)∈ℓ_1, для любой последовательности b=(b_1, b_2, …)∈ℓ_1 , если выполнено условие:
-: $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{\text{ij}}|^2 > 1$
-: $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{\text{ij}}|^2 = 1$
-:$\sup\limits_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{\text{ij}}| > 1$
+: $\sup\limits_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{\text{ij}}| < 1$
45. Отображение $A\phi = x + \lambda \int_0^1 t^2\, \phi(t)$ dt будет сжимающим, при условии, что:
-: $|\lambda| \leq 1$
-: $|\lambda| \leq 1/5$
+: $|\lambda| \leq 1/\sqrt{5}$
-: λ $-$любое число
46. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 - 3x$ будут точки:
-: $0;\ 3$
+: $0;\ 4$
-: $-2;\ 2$
-: $-\sqrt{3};\ 3$
47. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 + x - 3$ будут точки:
-: $0;\ 3$
-: $0;\ 4$
-: $-2;\ 2$
+: $-\sqrt{3};\ 3$
48. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 + x - 4$ будут точки:
-: $0;\ 3$
-: $0;\ 4$
+: $-2;\ 2$
-: $-\sqrt{3};\ 3$
49. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 - 2x$ будут точки:

+: $0;\ 3$
-: $0;\ 1$
-: $-2;\ 2$
-: $-\sqrt{3};\ 3$
50. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 - x - 3$ будут точки:
+: $-1;\ 3$
-: $1;\ 4$
-: $-2;\ 2$
-: $-\sqrt{13}$; $\sqrt{13}$
51. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 - x + 1$ будут точки:
-: 1; 3
+: 1
-: -1; 1
-: $-\sqrt{3};\ \sqrt{3}$
52. Неподвижными точками отображения $f(x) = x^2 - 4x + 4$ будут точки:

-: 2
+: 1; 4
-: -1; 1
-: $-\sqrt{3}$; 2

53. Первое приближение решения интегрального уравнения $\phi(x) = \int_0^x x\, t\, \phi(t)\, \mathrm{dt} + x$, $\phi_0(x) = x$, будет равна
-: $\phi_1(x) = \frac{x^3 - x^2}{2} + x$
-: $\phi_1(x) = \frac{x^3}{2} + x$
-: $\phi_1(x) = \frac{x^4}{4} + x$
+: $\phi_1(x) = \frac{x^4}{3} + x$

54. Первое приближение решения интегрального уравнения $\phi(x) = \int_0^1 x\, t\, \phi(t)\, \mathrm{dt} + x$, $\phi_0(x) = x$, будет равна
-: $\phi_1(x) = \frac{x^2}{2} + x$
-: $\phi_1(x) = \frac{x^2}{3} + x$
-: $\phi_1(x) = \frac{5x}{4}$
+: $\phi_1(x) = \frac{4x}{3}$

55. Первое приближение решения интегрального уравнения $\phi(x) = \int_1^e \ln t\, \phi(t)\, \mathrm{dt} + x$, $\phi_0(x) = x$, будет равна
-: $\phi_1(x) = \frac{e^2 - 1}{4}$
-: $\phi_1(x) = 2x$
-: $\phi_1(x) = \frac{e^2 + 1}{2}$
+: $\phi_1(x) = \frac{e^2 + 1}{4}$

56. Первое приближение решения интегрального уравнения $\phi(x) = \int_0^x t^2\, \phi(t)\, \mathrm{dt} + x$, $\phi_0(x) = x$, будет равна
-: $\phi_1(x) = \frac{x^4}{3} + 1$
-: $\phi_1(x) = \frac{x^4}{3} + x$
-: $\phi_1(x) = \frac{x^3}{3} + x$
+: $\phi_1(x) = \frac{x^4}{4} + x$

57. Первое приближение решения интегрального уравнения $\phi(x) = \int_0^1 e^t\, \phi(t)\, \mathrm{dt} + x$, $\phi_0(x) = x$, будет равна
-: $\phi_1(x) = x\, e$
-: $\phi_1(x) = x(e + 2)$
+: $\phi_1(x) = 1 + x$
-: $\phi_1(x) = e(1 + x)$

58. Первое приближение решения интегрального уравнения $\phi(x) = \int_0^1 e^t\, \phi(t)\, \mathrm{dt} + x$, $\phi_0(x) = 1$, будет равна
-: $\phi_1(x) = x\, e$
+: $\phi_1(x) = e$
-: $\phi_1(x) = 1 + e$
-: $\phi_1(x) = 1 - e$

59. Второе приближение решения интегрального уравнения $\phi(x) = \int_0^x (x + t)\, \phi(t)\, \mathrm{dt} + 1$, $\phi_0(x) = 1$, будет равна
-: $\phi_2(x) = \frac{x^3 + x^2}{2} + 1$

-: $\phi_2(x) = \frac{5x^2}{8} + 1$
+: $\phi_2(x) = \frac{7x^4+12x^2}{8} + 1$
-: $\phi_2(x) = \frac{5x^3}{6} + x$

60. Второе приближение решения интегрального уравнения $\phi(x) = \int_0^x (x+t)^2 \, \phi(t) \, \mathrm{dt} + 1$, $\phi_0(x) = 0$, будет равна
-: $\phi_2(x) = \frac{7x^3+5x^2}{2} + 1$
-: $\phi_2(x) = \frac{5x^2}{4} + 1$
+: $\phi_2(x) = \frac{7x^3}{3} + 1$
-: $\phi_2(x) = \frac{5x^3}{6} + x$

61. Пусть A_1 и A_2 - два ограниченных открытых множества. Если $A_1 \subset A_2$, то:
+: $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$
-: $\mu(A_1) = \mu(A_2)$
-: $\mu(A_1) > \mu(A_2)$
-: $\mu(A_1) \geq \mu(A_2)$

62. Всякая функция, заданная на множестве меры нуль:
-: неизмерима
-: непрерывна
+: равна нулю
-: равна ∞

63. Если открытое ограниченное множество A является суммой конечного числа или счетного множества взаимно не налегающих открытых множеств $A = \sum_k A_k$, то:
-: $\mu(A) < \sum_k \mu(A_k)$
-: $\mu(A) \leq \sum_k \mu(A_k)$
+: $\mu(A) = \sum_k \mu(A_k)$
-: $\mu(A) \geq \sum_k \mu(A_k)$

64. Если $f(x)$ и $g(x)$ –есть измеримые функции, заданные на множестве Е, то их разность $f(x) - g(x)$:
-: не измерима
-: имеет меру нуль
+: измерима
-: имеет меру 1

65. Мера суммы конечного числа попарно не пересекающихся сегментов равна:
+: сумме длин этих сегментов
-: разности длин этих сегментов
-: полусумме длин этих сегментов
-: полуразности длин этих сегментов

66. Пусть множество Е на отрезке [0; 1] имеет меру нуль, тогда замыкание $\bar{E}$ имеет меру:
+: 0
-: 1
-: $\frac{1}{2}$
-: $\frac{3}{4}$

67. Если $f(x)$ - суммируемая на множестве A функция, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого $e \subset A$ такого, что $\mu(e) < \delta$ верно:

-: $\int_A f(x)d\mu < \varepsilon$
-: $\int_A f(x)d\mu > \varepsilon$
+: $\left|\int_A f(x)d\mu\right| < \varepsilon$
-: $\left|\int_A f(x)d\mu\right| > \varepsilon$

68. Если $f(x)$ и $g(x)$ –есть измеримые функции, заданные на множестве E, то их сумма $f(x)+g(x)$:
-: не измерима
-: имеет меру нуль
+: измерима
-: имеет меру 1

69. Интеграл Лебега по интервалу (0; ∞) от функции $3^{-[x]}$, равен:
-: 1
-: 2
-: 3
+: 1,5

70. Интеграл Лебега по интервалу (0; ∞) от функции $2^{-[x]}$, равен:
-: 1
+: 2
-: 3
-: 1,5

71. Интеграл Лебега на отрезке [0; 1] от функции
$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{в рациональных точках} \\ -x^2, \text{в иррациональных точках} \end{cases}$ равен:
-: 0
-: $\frac{2}{3}$
-: $\frac{1}{3}$
+: $-\frac{1}{3}$

72. Интеграл Лебега на множестве [0; 1] от функции $f(x)$ равной x^2 во всех точках пересечения канторова множества и некоторого множества E и равной x^3 в остальных точках отрезка [0; 1] равен:
-: 0
+: 025
-: 0,5
-: $\frac{1}{3}$

73. Интеграл Лебега от функции $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{для } x \text{ иррациональных, больших чем } \frac{1}{3} \\ x^3, \text{для } x \text{ иррациональных, меньших чем } \frac{1}{3} \\ 0, \text{в рациональныхточках точках} \end{cases}$
на отрезке [0;1] равен:
-: $\frac{7}{108}$
-: $\frac{5}{108}$
+: $\frac{35}{108}$
-: 0

74. Вычислить $\int_{[0;1]} f(x)d\mu$, если $f(x) = \begin{cases} \sin\pi x, \text{ для } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \cap \text{СД} \\ \cos\pi x, \text{ для } x \in \left[\frac{1}{2},1\right] \cap \text{СД} \\ x^2, \text{ для } x \in \text{Д} \end{cases}$
где Д – канторово множество, а СД – его дополнение до всего отрезка [0; 1].
+: 0

-: $\frac{1}{\pi}$
-: 0,5
-: $\frac{1}{3}$

75. Интеграл Лебега $\int_{[0;\,1]} f(x)d\mu$, если $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{для } x \text{ иррациональных} \\ x^3 + \sqrt{x}, & \text{для } x \text{ рациональных} \end{cases}$ равен:
-: 0
-: 1
-: $\frac{11}{12}$
+: 2

76. Числовая прямая образует нормированное пространство, если в качестве расстояния принять:
-: $\| x \| = x$
-: $\| x \| = x^{1/2}$
-: $\| x \| = \sqrt{x^3}$
+: $\| x \| = |x|$

77. Евклидово 2-мерное пространство R^2, носителем которого является множество всевозможных упорядоченных наборов из n чисел, является нормированным пространством, если за норму принять:
-: $\| x \| = \sqrt{x_1 + x_2}$
-: $\| x \| = x_1 + x_2$
+: $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
-: $\| x \| = (x_1^3 + x_2^3)^{13}$

78. В пространстве C[a; b] норма определяется по формуле:
+: $\| x \| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$
-: $\| x \| = x(t)$
-: $\| x \| = \max\limits_{a \le t \le b} |\sqrt{x(t)}|$
-: $\| x \| = x^2(t)$

79. В пространстве сходящихся с квадратом последовательностей ℓ_2 норма определяется по формуле:
+: $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k)^2}$
-: $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x_k)^2}$
-: $\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k)^2$
-: $\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x_k)^2$

80. Пространство X будет нормированным, если::
+: $\| x \| = \int_0^1 2^t |x(t)|\, dt$
-: $\| x \| = \int_0^1 |e^{x(t)}|\, dt$:
-: $\| x \| = \int_0^1 |x^2(t)|\, dt$
-: $\| x \| = \int_0^1 2^{x(t)} |x(t)|\, dt$

81. Пространство X будет нормированным, если:
+: $\| x \| = \int_0^1 e^t |x(t)|\, dt$
-: $\| x \| = \int_0^1 |e^{x(t)}|\, dt$:
-: $\| x \| = \int_0^1 |x^2(t)|\, dt$
-: $\| x \| = \int_0^1 e^{x(t)} |x(t)|\, dt$

82. Пространство ℓ_p, $p \ge 1$, числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ будет нормированным, если за норму принять число:

+: $\| x \| = (\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p)^{1/p}$
-: $\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p$
-: $\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|$
-: $\| x \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{\frac{1}{p}}\right)^p$

83. Пространство X будет нормированным, если:
+: $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 2^k (x_k)^2}$
-: $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(-2)^k (x_k)^2}$
-: $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{x_k} (x_k)^2}$
-: $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 (1 - x_k)^2}$

84. Норма элемента $x_n = \frac{3^{n-1}}{4^n}$ в пространстве l_1 равна:
+: 1
-: 4
-: $\frac{4}{3}$
-: ∞

85. Норма элемента $x(t) = 3t - t^3$ в пространстве $C[-2;\ 2]$ равна:
-: -2
+: 2
-: 0
-: 14

86. Норма элемента $x(t) = \ln t - t$ в пространстве $C[0{,}1;\ e]$ равна:
+: $e - 1$
-: $1 - e$
-: 0,1+ln10
-: 1

87. Норма элемента $x_n = \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$ в пространстве l_1 равна:
-: 1
+: e^5
-: $\frac{1}{5}$
-: ∞

88. Норма элемента $x(t) = t^3 \ln t$ в пространстве $L_1\ [1\ , e]$ равна:
+: $\frac{3e^4+1}{16}$
-: $\frac{3e^4+1}{4}$
-: $\frac{3e^4-1}{16}$
-: $\frac{3e^4-1}{4}$

89. Норма элемента $x(t) = t\cos t$ в пространстве $L_1\ \left[0\ , \frac{\pi}{2}\right]$ равна:
-: $\pi + 2$
-: π
+: $\frac{\pi}{2} - 1$
-: $\frac{\pi}{2} + 1$

90. Норма элемента $x(t) = \sin \pi t$ в пространстве $L_2\ [0\ , 2]$ равна:
+: 1
-: $\frac{1}{\pi}$
-: $\sqrt{2}$
-: $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

3.5. Оценочные материалы для промежуточной аттестации

Перечень вопросов, выносимых на зачёт
(контролируемая компетенция ПКС-1):

1. Аксиомы метрического пространства.
2. Неравенства Коши–Буняковского, Минковского, Юнга, Гёлдера.
3. Полные метрические пространства.
4. Пополнение метрических пространств.
5. Принцип сжимающих отображений.
6. Метод последовательных приближений.
7. Метод последовательных приближений для системы линейных алгебраических уравнений.
8. Теорема существования и единственности для задачи Коши.
9. Теорема существования и единственности для интегрального уравнения Вольтерра.
10. Теорема существования и единственности для интегрального уравнения Фредгольма.
11. Топологические пространства, основные определения.
12. Сравнение топологий.
13. Сепарабельные топологические пространства, основные определения.
14. Непрерывные отображения.
15. Аксиома отделимости Хаусдорфовые пространства.
16. Понятия компактности.
17. Компактность в метрических пространствах.
18. Предкомпактные множества.
19. Теория меры. Кольцо и алгебра множеств. Элементарные множества.
20. Лебегова мера плоских множеств.
21. Общее понятие меры.
22. Измеримые функции. Действия над измеримыми функциями.
23. Сходимость по мере.
24. Интеграл Лебега. Простые функции.
25. Свойства интеграла Лебега.
26. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.
27. Теорема Фубини.
28. Линейные пространства. Определения и примеры.
29. Линейные функционалы.
30. Выпуклые функционалы.
31. Нормированные пространства.
32. Евклидовы пространства.
33. Существование ортогональных базисов, ортогонализация.
34. Неравенства Бесселя.
35. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса–Фишера.
36. Гильбертово пространство.
37. Непрерывные линейные функционалы в линейных нормированных пространствах.
38. Определение сопряженного пространства.
39. Сильная топология в сопряженном пространстве.
40. Слабая топология и слабая сходимость.
41. Обобщенные функции.
42. Действия над обобщенными функциями.
43. Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций.
44. Линейные операторы, определения и примеры.
45. Непрерывность и ограниченность.
46. Сумма и произведение операторов.
47. Обратный оператор, обратимость.

48. Сопряженные операторы.
49. Самосопряженные операторы.
50. Спектр оператора.
51. Резольвента.
52. Компактные операторы.
53. Неограниченные операторы в нормированных пространствах.

В результате знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

Сумма баллов текущего и рубежного контроля	**Сумма баллов на зачете**	**Общая сумма баллов**	**Оценка**
≥61	-	61	зачет (без сдачи)
36-60	0	36-60	незачет
36-60	25-1	61	зачет
<36	-	-	недопуск

Перечень вопросов на экзамен
(контролируемая компетенция ПКС-1):

1. Метрические пространства. Примеры метрических пространств.
2. Неравенства Гельдера и Минковского.
3. Интегральные неравенства Гельдера и Минковского.
4. Непрерывные отображения метрических пространств. Примеры.
5. Измеримые функции. Интеграл Лебега от измеримой функции. Свойства.
6. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах (с доказательством).
7. Банаховы пространства. Теорема Бера (с доказательством).
8. Принцип сжимающих отображений (с доказательством). Применения принципа сжимающих отображений.
9. Понятие линейного пространства. Примеры линейных пространств.
10. Нормированные пространства. Примеры нормированных пространств.
11. Нормированные пространства. Подпространства нормированных пространств.
12. Компактные множества. Примеры компактных множеств.
13. Компактные множества. Теорема Арцелла (доказательство необходимости).
14. Компактные множества. Теорема Арцелла (доказательство достаточности).
15. Критерий компактности в пространстве $L_p[a, b]$. Теорема Рисса (с доказательством).
16. Непрерывные линейные функционалы. Примеры.
17. Критерий непрерывности линейных функционалов (с доказательством).
18. Линейные функционалы в нормированных пространствах.
19. Сопряженное пространство. Общий вид линейных функционалов в Банаховых пространствах.
20. Теорема о полноте сопряженных пространств. Рефлексивные пространства.
21. Сопряженные операторы. Примеры сопряженных операторов. Самосопряженные операторы.
22. Обратные операторы. Свойства обратных операторов.
23. Теорема Банаха об обратном операторе (с доказательством).
24. Понятие спектра линейного оператора в Банаховом пространстве. Резольвента.
25. Резольвента оператора. Аналитические свойства резольвенты.
26. Теорема о спектре сопряженного оператора (с доказательством).
27. Компактные операторы. Свойства. Примеры.
28. Понятие о локально выпуклом пространстве. Функционал Минковского.
29. Обобщенные функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Носитель обобщенной функции.

30. Понятие обобщенных функций и обобщенных производных.
31. Гильбертовы пространства. Примеры гильбертовых пространств.
32. Ортогональность в гильбертовом пространстве. Ортогональные и ортонормированные системы.
33. Общий вид линейных функционалов в гильбертовом пространстве.
34. Сопряженные, самосопряженные и унитарные операторы в гильбертовых пространствах.
35. Спектр самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
36. Инвариантные подпространства в гильбертовых пространствах. Примеры. Свойства.
37. Операторы с чисто точечным спектром. Теорема о связи с собственными значениями (с доказательством).
38. Спектральное разложение самосопряженных операторов.
39. Положительные и положительно определенные операторы. Примеры. Свойства.
40. Разложение функции, заданной на $[-\pi, \pi]$ в тригонометрический ряд Фурье. Условие Дирихле. Признак Дирихле.
41. Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье функции, заданной на $[-\pi, \pi]$.
42. Преобразование Лапласа и его свойства (одно свойство с доказательством).
43. Применение преобразования Лапласа к решению задачи Коши для ОДУ.
44. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенной функции.
45. Понятие интегральных уравнений. Задачи, приводящие к понятию интегральные уравнения.
46. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Представление решения через резольвенту ядра.
47. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Методика решения интегральных уравнений с вырожденным ядром.
48. Интегральные уравнения с симметрическим ядром. Сопряженные интегральные уравнения. Операторы Гильберта–Шмидта.
49. Теоремы Фредгольма. Альтернатива Фредгольма (с доказательством).
50. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода. Представление решения через резольвенту.
51. Интегральное уравнение со слабой особенностью. Уравнение Абеля. Методика решения уравнения Абеля.

В экзаменационные билеты включаются два теоретических вопроса из различных разделов программы и одна задача.

Критерии формирования оценок по промежуточной аттестации:

«отлично» (30 баллов) – получают обучающиеся, которые свободно ориентируются в материале и отвечают без затруднений. Обучающийся способен к выполнению сложных заданий, постановке целей и выборе путей их реализации. Работа выполнена полностью без ошибок, решено 100% задач;

«хорошо» (24 балла) – получают обучающиеся, которые относительно полно ориентируются в материале, отвечают без затруднений, допускают незначительное количество ошибок. Обучающийся способен к выполнению сложных заданий. Работа выполнена полностью, но имеются не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов. Допускаются незначительные неточности при решении задач, решено 70% задач;

«удовлетворительно» (18 баллов) – получают обучающиеся, у которых недостаточно высок уровень владения материалом. В процессе ответа на экзамене допускаются ошибки и затруднения при изложении материала. Обучающийся правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой. Обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, решено 55% задач;

«неудовлетворительно» (14 баллов) – получают обучающиеся, которые допускают значительные ошибки. Обучающийся имеет лишь начальную степень ориентации в материале. В работе число ошибок и недочетов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы. Обучающийся дает неверную оценку ситуации, решено менее 50% задач.

Форма экзаменационного билета
по учебной дисциплине

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»
(КБГУ)

Кафедра – Алгебры и дифференциальных уравнений
Дисциплина – Функциональный анализ
Направление, курс – 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, 3 курс

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Множество. Пересечение. Объединение. Разность. Симметрическая разность.
2. Норма. Нормированное пространство. Примеры нормированных пространств.
3. Пусть X– некоторое метрическое пространство. Выяснить можно ли в пространство X расстояние ввести по формуле:

$$\rho(x,y)=\int_a^b 2^{-t}|x(t)-y(t)|dt$$

Руководитель ОПОП,
заведующая кафедрой А и ДУ
к.ф.-м.н., доцент ____________**М.С. Нирова**