

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ОПОП
В.С. М.С. Нирова
«12» апреля 2023г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ»

(код и наименование дисциплины)

Программа специалитета

01.05.01 Фундаментальные математика и механика
(код и наименование программы специалитета)

Направленность (профиль)

Фундаментальная математика
(наименование направленности (профиля))

Квалификация (степень) выпускника

специалист

Форма обучения

очная

НАЛЬЧИК 2023г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень компетенций и этапы их формирования

2. Методические материалы и типовые контрольные задания, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы 5
3. Перечень контрольных заданий и иных материалов, необходимых для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности 5
4. Вопросы для зачета по дисциплине 19

1. Перечень компетенций и этапы их формирования

Карта компетенции

Шифр и название компетенций:

ПКС-1. Умение ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории.

ПКС-4. Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках.

Индикаторы достижения компетенции ПКС-1:

ПКС-1.2. Способен формулировать математические знания с учетом уровня слушателей.

Индикаторы достижения компетенции ПКС-4:

ПКС-4.1. Способен решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики

Общая характеристика компетенции

Тип компетенции: профессиональная компетенция выпускника образовательной программы по направлению подготовки высшего образования 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика», уровень ВО - специалитет.

1.1. Этапы формирования компетенций и средства оценивания

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины	Индикаторы достижений	Основные показатели оценки результатов обучения	Вид оценочного средства
ПКС-1 Умение ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории	ПКС-1.2. Способен формулировать математические знания с учетом уровня слушателей	Знать: особенности представления собственно новых результатов научной деятельности Уметь: обрабатывать полученные результаты, анализировать и осмысливать их с учетом имеющихся литературных данных Владеть: навыками представления собственных и известных результатов научной деятельности.	Оценочные материалы для контрольной работы Типовые тестовые задания Оценочные материалы для проведения коллоквиума Типовые оценочные материалы к зачету
ПКС-4 Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках	ПКС-4.1. Способен решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики	Знать: Основные методы решения актуальных и значимых задач фундаментальной и прикладной математики. Уметь: применять методы математического моделирования в естественных науках.	Оценочные материалы для контрольной работы Типовые тестовые задания Оценочные материалы для проведения

		Владеть: способами исследования математических моделей в естественных науках.	коллоквиума Типовые оценочные материалы к зачету
--	--	---	--

1.2. Критерии формирования оценок на различных этапах их формирования

Текущий и рубежный контроль

Этап (уровень)	Первый этап (уровень)	Второй этап (уровень)	Третий этап (уровень)
Баллы	36-50 баллов	51-60 баллов	61-70 баллов
Характеристика	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Частичное выполнение домашнего задания. Частичное выполнение заданий контрольных работ, тестовых заданий на оценку «удовлетворительно».	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение домашнего задания. Выполнение заданий на коллоквиуме на оценку «хорошо».	Полное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение домашнего задания, заданий контрольных работ. Выполнение заданий на коллоквиуме на оценку «отлично».

На первом (начальном) этапе формирования компетенции формируются знания, умения и навыки, составляющие базовую основу компетенции, без которой невозможно ее дальнейшее развитие. Обучающийся воспроизводит термины, факты, методы, понятия, принципы и правила; решает учебные задачи по образцу.

На втором (основном) этапе формирования компетенции приобретает опыт деятельности, когда отдельные компоненты компетенции начинают «работать» в комплексе и происходит выработка индивидуального алгоритма продуктивных действий, направленных на достижение поставленной цели.

На этом этапе обучающийся осваивает аналитические действия с предметными знаниями по конкретной дисциплине, способен самостоятельно решать учебные задачи, внося коррективы в алгоритм действий, осуществляя координирование хода работы, переносит знания и умения на новые условия.

Третий (завершающий) этап – это овладение компетенцией. Обучающийся способен использовать знания, умения, навыки при решении задач повышенной сложности и в нестандартных условиях. По результатам этого этапа обучающийся демонстрирует итоговый уровень сформированности компетенции.

Промежуточная аттестация

Семестр	Шкала оценивания	
	Незачтено (36-60)	Зачтено (61-70)
8	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете не ответил ни на один вопрос.	Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете представил полный ответ на один вопроси частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете дал полный ответ на

		один вопросили частично ответил на оба вопроса. Студенту, имеющему 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, выставляется отметка «зачтено» без сдачи зачёта.
--	--	---

2. Методические материалы и типовые контрольные задания, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Перечень оценочных средств

№	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
1.	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2.	Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Фонд тестовых заданий
3.	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам

3. Перечень контрольных заданий и иных материалов, необходимых для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности

3.1. Вопросы для коллоквиумов

Вопросы для оценки компетенции «ПКС-1, ПКС-4»:

Тема 1. Теория делимости в кольце целых чисел.

1. Делимость в кольце целых чисел. Теорема о делении с остатком
2. Теорема о существовании НОД в кольце Z . Теорема Евклида о простых числах
3. Функция ord_p и ее свойства. Леммы о простых числах
4. Основная теорема арифметики.
5. Аналоги основной теоремы арифметики для других колец.

Тема 2. Арифметические функции.

6. Теорема о мультипликативных функциях.
7. Функции числа делителей и суммы делителей
8. Функция Мебиуса и ее свойства.

9. Произведение по Дирихле арифметических функций. Теорема обращения Мебиуса. Функция Эйлера. Соотношение Гаусса.
10. О других функциях в теории чисел.

Тема 3. Сравнения.

11. Сравнения. Классы вычетов и их свойства.
12. Кольцо классов вычетов.
13. Дальнейшие свойства сравнений. Теоремы Эйлера и Ферма о сравнениях.
14. Китайская теорема об остатках
15. Теорема о системах сравнений с неизвестными. Линейные сравнения с одной неизвестной.

Тема 4. Конечные поля.

16. Теорема о числе элементов конечного поля. Теорема о существовании конечного поля с заданным числом элементов.
17. Теорема о мультипликативной группе конечного поля. Критерий подполя конечного поля.
18. Дальнейшие свойства конечных полей.
19. Первообразные корни и исчисление индексов по простому модулю и их свойства.
20. Способы построения конечных полей. Сравнения по двойному модулю.
21. Уравнения в конечном поле. Теорема Шевалле – Варнинга.
22. Сравнения с одной неизвестной по простому модулю.

Тема 5. Квадратичные вычеты. Обзор исследований по распределению простых чисел. Характеры Дирихле.

23. Двучленные уравнения и сравнения. Квадратичные вычеты и невычеты.
24. Символы Лежандра и Якоби.
25. Квадратичный закон взаимности.
26. Конечное поле как простое алгебраическое расширение. Автоморфизмы конечного поля.
27. Исторический обзор исследований по распределению простых чисел.
28. Теорема Дирихле о простых числа в арифметической прогрессии.

Критерии формирования оценок по контрольным точкам (коллоквиум)

«отличный (высокий) уровень компетенции» (5 баллов) - ставится в случае, когда обучающийся демонстрирует знание теоретического материала на 100%;

«хороший (нормальный) уровень компетенции» (4 баллов) - ставится в случае, когда обучающийся демонстрирует знание теоретического материала на 70%;

«удовлетворительный (минимальный, пороговый) уровень компетенции» (3 балла) – ставится в случае, когда обучающийся затрудняется с правильной формулировкой теоретического материала, дает неполный ответ, демонстрирует знание теоретического материала на 50%;

«неудовлетворительный (ниже порогового) уровень компетенции» (2 и менее баллов) – ставится в случае, когда обучающийся дает неверную формулировку теоретического материала, дает неверный ответ, демонстрирует незнание теоретического материала или знание материала менее чем на 40%.

3.2. Оценочные материалы для контрольной работы: контролируемые компетенции ПКС-1, ПКС-4.

Вариант 1.

1. Доказать, что произведение Дирихле двух мультипликативных функций также есть мультипликативная функция.

2. Пусть $f(a)$ - арифметическая функция, определенная для всех целых положительных a и функция $g(a) = \sum_{d|a} f(d)$ - мультипликативная. Доказать, что функция $f(a)$ также мультипликативная.

3. Доказать, что $\sum_{d^2|a} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \text{ квадрат} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, где μ - функция Мебиуса.

Вариант 2.

1. Доказать, что $\{d \in \mathbb{N} | d|a, \text{НОД}(d, \frac{a}{d}) = \delta\} = 2^{v(\frac{a}{\delta^2})}$, где $\#M$ - мощность множества M , $v(n)$ - число различных простых делителей n .

2. Доказать, что

а) $\tau(a) = \sum_{d^2|a} 2^{v(\frac{a}{d^2})}$, где $\mu(n)$ - число делителей, $v(n)$ - число различных простых делителей n .

б) $2^{v(a)} = \sum_{d^2|a} \mu(d) \tau(\frac{a}{d^2})$, где μ - функция Мебиуса.

3. Доказать, что если $ab \equiv ac \pmod{m}$, то $b \equiv c \pmod{\frac{m}{(a,m)}}$.

Вариант 3.

1. Показать, что уравнение $x^2 - 3y^2 = 2$ не имеет решений в целых числах.

2. Показать, что уравнение $x^2 - 7y^2 = 2$ не имеет решений в целых числах.

3. Пусть m - целое, $m > 0$, ξ , пробегает приведенную систему вычетов по модулю m .

Доказать, что $\mu(m) = \sum_{\xi \pmod{m}} e^{2\pi i \frac{\xi}{m}}$, где $\mu(m)$ - функция Мебиуса; штрих означает, что суммирование ведется по приведенной системе вычетов (\pmod{m}).

Вариант 4.

1. Доказать, что если $F_{3^n} = \{0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{3^n-1}\}$, то его простое подполе имеет вид $F_3 = \{0, \alpha^{\frac{3^n-1}{2}}, \alpha^{3^n-1}\}$.

2. Доказать, что если $F_9 = F_3(\theta) = \{\alpha_0 + \alpha_1 \theta \mid \alpha_0, \alpha_1 \in F_3\}$. и $F_9 = \{0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^8\}$, то $\theta = \alpha^m$, где $m \equiv 4 \pmod{8}$.

3. Доказать, что поле, построенное из классов вычетов по двойному модулю $\{p; ax+b\}$, где $p \nmid a$, изоморфно простому полю F_p , т.е. $F_p[x]/(ax+b)F_p[x] \simeq F_p$.

Вариант 5.

1. Пусть p - простое и h_1, h_2, \dots, h_a - целые числа. Доказать, что

а) $(h_1 + h_2 + \dots + h_a)^p \equiv h_1^p + h_2^p + \dots + h_a^p \pmod{p}$;

б) Из а) вывести малую теорему Ферма;

в) Из малой теоремы Ферма вывести теорему Эйлера о сравнениях.

2. Пусть F - поле. Доказать, что

$$F[x]/(x^2 + 1)F[x] = \begin{cases} F_{p^2}, & \text{если } F = F_p, p \equiv 3 \pmod{4} \\ \{C, \text{ если } F = R\} \end{cases}$$

3. Пусть F - поле. Доказать, что если его мультипликативная группа F^* циклическа, то F - конечное поле.

Критерии формирования оценок по контрольным точкам (контрольные работы)

5 баллов - правильно выполнены все задания, продемонстрирован высокий уровень владения материалом, проявлены превосходные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

4 балла - правильно выполнена большая часть заданий, присутствуют незначительные ошибки, продемонстрирован хороший уровень владения материалом, проявлены средние способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

2 балла - задания выполнены менее чем наполовину, продемонстрирован неудовлетворительный уровень владения материалом, проявлены недостаточные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

1 балл - дан неполный ответ, представляющий собой разрозненные знания по теме вопроса существенными ошибками в определениях.

0 баллов - при полном несоответствии всем критериям и отсутствии ответа.

**3.3. Типовые тестовые задания по дисциплине «Избранные вопросы теории чисел»
(контролируемые компетенции ПКС-3):**

V1: топ

V2: Избранные вопросы теории чисел

V3: НОД и НОК чисел

I: -

S: НОД($2^2 * 3^3 * 7 * 11^2, 2^3 * 3^2 * 5 * 11$) равен:

+: $2^2 * 3^2 * 11$

-: $2^3 * 3^2 * 5 * 7 * 11^2$

-: $2^2 * 3^2 * 5 * 7 * 11$

-: $2^3 * 3^2 * 5 * 7$

I: -

S: НОД($2^6 * 3^2 * 5 * 11, 3^3 * 5^2 * 7$) равен:

+: $3^2 * 5$

-: $2^6 * 3^2 * 5 * 7 * 11$

-: $2^6 * 3^2 * 5$

-: $2^6 * 3^3 * 5^2 * 7 * 11$

I: -

S: НОД($2^7 * 3^5 * 7, 2^3 * 3^2 * 7 * 11^2$) равен:

+: $2^3 * 3^2 * 7$

-: $2^3 * 3^2 * 7 * 11^2$

-: $2^7 * 3^5 * 7 * 11^2$

-: $2^7 * 3^5 * 7$

I: -

S: НОК(231,68,2) равно:

+: $231 * 68$

-: 68

-: $231 * 68 * 2$

-: 136

I: -

S: НОК(216,38,2) равно:

+: $216 * 19$

-: $216 * 2$

-: $216 * 38 * 2$

-: $216 * 38$

I: -

S: НОК(231,68,1) равно:

+: $231 * 68$

-: 231

-: 231

-: 1

I: -

S: НОК($2^2 * 3^3 * 7 * 11^2, 2^3 * 3^2 * 5 * 11$) равно:

+: $2^3 * 3^3 * 5 * 7 * 11^2$

-: $2^2 * 3^2 * 5^2 * 7 * 11$

-: $2^2 * 3^2 * 11$

-: $2^3 * 3^2 * 5 * 7 * 11$

I: -

S: НОК($2^3 * 3^2 * 5 * 11, 2^5 * 3 * 5 * 7$) равно:

+: $2^5 * 3^2 * 5 * 7 * 11$

-: $2^5 * 3^2 * 5 * 7$

-: $2^3 * 3 * 5$

-: $2^3 * 3 * 5 * 7 * 11$

I: -

S: НОК($2^5 * 3 * 5^3 * 7^2, 2^4 * 3^2 * 5$) равно:

+: $2^5 * 3^2 * 5^3 * 7^2$

-: $2^4 * 3 * 5$

-: $2^4 * 3^2 * 5$

-: $2^5 * 3^2 * 5^3$

V1: top

V2: Взаимно простые числа

I: -

S: Парно взаимно простыми числами являются числа:

+: 13; 15; 17

-: 13; 15; 18

-: 1; 15; 18

-: 0; 15; 18

I: -

S: Парно взаимно простыми числами являются числа:

+: 17, 19, 21

-: 15, 17, 19, 21

-: 0, 13, 19

-: 1, 6, 9

I: -

S: Парно взаимно простыми числами являются числа:

+: 1, 2, 5, 7

-: 1, 6, 15

-: 0, 2, 5, 7

-: 0, 6, 15

I: -

S: Взаимно простыми числами являются числа:

+: 27; 29

-: 27; 18

-: 3; 0

-: 15; 18

I: -

S: Взаимно простыми числами являются числа:

+: 31; 2

-: 31; 62

-: 62; 4

-: 31; 0

I: -

S: Взаимно простыми числами являются числа:

+: 28; 29
-: 28; 21
-: 28; 0
-: 29; 0

V1: top

V2: Составные числа

I: -

S: Количество составных чисел на отрезке $[0; 10]$ равно:

+: 5

-: 4

-: 3

-: 2

I: -

S: Количество составных чисел на отрезке $[0; 11]$ равно:

+: 5

-: 6

-: 4

-: 3

I: -

S: Целое число p^a , где p - простое число, является составным при:

+: $a \geq 2$

-: $a = -1$

-: $a = 0$

-: $a = 1$

I: -

S: Количество составных чисел на отрезке $[0; 12]$ равно:

+: 6

-: 8

-: 7

-: 5

I: -

S: Для любого натурального числа $n \neq 1$ составным является число:

+: $n^3 + 1$

-: $n^3 + 2$

-: $n^3 + 3$

-: $n^3 + 5$

V1: top

V2: Связь НОК и НОД двух чисел

I: -

S: Если $b \mid a$, то $НОК(a, b)$ равно:

+: a

-: b

-: $\frac{a}{b}$

-: $a \cdot b$

I: -

I: -

S: $НОК(n, n+1)$ равно:

+: $n(n+1)$
-: 1
 $\frac{n(n+1)}{2}$

-: 2

I: -

S: НОК($2^m, 2^n$) при $m \leq n$ равно:

+: 2^n

-: 2^m

-: 2^{m+n}

-: 2^{m*n}

I: -

S: Если $\text{НОК}(a, b) = k$, то $\text{НОК}(ma, mb)$ равно:

+: mk

-: kab

-: $km^2 ab$

-: $\frac{ab}{k} m$

V1: top

V2: Решето Эратосфена

I: -

S: Количество простых чисел, лежащих на отрезке [0; 50] равно:

+: 15

-: 16

-: 14

-: 17

I: -

S: Количество простых чисел, лежащих на отрезке [28; 70] равно:

+: 10

-: 9

-: 8

-: 11

S: Количество простых чисел, лежащих на отрезке [1; 40] равно:

+: 12

-: 13

-: 14

-: 11

V1: top

V2: Алгоритм Евклида

I: -

S: НОД(184,69) равен:

+: 23

-: 1

-: 69

-: 3

I: -

S: НОД(259,119) равен:

+: 7
-: 2
-: 1
-: 17
I: -

S: НОД(314,450) равен:

+: 2
-: 1
-: 4
-: 3

V1: top

V2: Делимость чисел

I: -

S: Число $\frac{73}{27}$ разлагается в непрерывную дробь:

+: [2, 1, 2, 2, 1, 2]
-: [2, 1, 2, 2, 3]
-: [2, 1, 2, 5]
-: [2, 1, 2, 2, 1, 1]

I: -

S: Число $\frac{30}{73}$ разлагается в непрерывную дробь:

+: [0, 2, 2, 3, 4]
-: [1, 1, 2, 2, 3]
-: [1, 1, 2, 5]
-: [0, 2, 2, 3, 3]

I: -

S: Произведение $n(n+1)(n+2) \forall n \in \mathbb{N}$ делится на:

+: 6
-: 8
-: 12
-: 24

V1: top

V2: Деление с остатком

I: -

S: Возможными остатками при делении целых чисел a на 3 будут числа:

+: 0; 1; 2
-: 1; 2; 3
-: 0; 1; 2
-: -1; 0; 1

I: -

S: Если $b|a$, то остаток при делении числа a на число b равен:

+: 0
-: 1

-: b
-: $a - b$

V1: top

V2: Понятие наименьшего общего кратного

I: -

S: Если $b|a$, то:

+: $\text{НОК}(a, b) = a$

-.: $\text{НОК}(a, b) = b$

-.: $\text{НОК}(a, b) = ab$

-.: $\text{НОК}(a, b) \neq a$

I: -

S: Если $\text{НОК}(a, b) = b$, то:

+: a не делит b

-.: $b|a$

-.: $a|b$

-.: $a=b$

I: -

S: $\text{НОК}(a+1, a)$ равно:

+: $a^2 + a$

-.: 1

-.: a

-.: $a+1$

I: -

S: $\text{НОК}(a, 1)$ равно:

+: a

-.: 1

-.: $a+1$

-.: 0

I: -

S: Если $\text{НОК}(a, b, 1) = b$, то:

+: $a|b$

-.: $b|a$

-.: $a = b$

-.: b не делится на a

V1: top

V2: Мультипликативность функции числа делителей

I: -

S: Значение $\tau(48 \cdot 15)$ для функции числа делителей равно:

+: 30

-.: 40

-.: 20

-.: 15

I: -

S: Значение $\tau(24 \cdot 36)$ для функции числа делителей равно:

+: 24

-: 72
-: 144
-: 96
I: -

S: Значение $\tau(18 \cdot 45)$ для функции числа делителей равно:

+: 20
-: 12
-: 72
-: 36

V1: top

V2: Теорема о наивысшем показателе степени простого числа p , делящей $n!$

I: -

S: Число нулей, которыми оканчивается число $16!$, равно:

+: 3
-: 12
-: 6
-: 5

I: -

S: Число нулей, которыми оканчивается число $15!$, равно:

+: 3
-: 11
-: 6
-: 5

V1: top

V2: 2 точка

V3: Теорема о числах, кратных d и не превосходящих заданного числа.

I: -

Количество натуральных чисел, кратных 7 и не превосходящих числа $\sqrt{500}$,

S: равно:

+: 3
-: 2
-: 4
-: 71

I: -

S: Количество нечетных чисел, кратных 5 и не превосходящих числа 200, равно:

+: 20
-: 40
-: 19
-: 21

I: -

S: Количество натуральных чисел, не превосходящих числа 200 и не кратных 3, равно:

+: 134
-: 66
-: 65
-: 133

V1: top

V2: Функция суммы делителей

I: -

S: Сумма нечетных делителей числа 360 равна:

+: 78

-: 1209

-: 30

-: 24

I: -

S: Сумма четных делителей числа 180 равна:

+: 234

-: 12

-: 117

-: 24

I: -

S: Сумма делителей числа 180 не кратных числу 3, равна:

+: 42

-: 84

-: 21

-: 63

Критерии формирования оценок по тестовым заданиям:

По итогам выполнения тестовых заданий оценка производится по пятибалльной шкале. При правильных ответах на:

- 89-100% заданий – «5» (баллов);
- 70-88% заданий – «4» баллов);
- 50-69% заданий – «3» (балла);
- 30-49% заданий – «2» (балла);
- 10-29% заданий – «1» (балл);
- менее 10% заданий – «0» (баллов).

3.4. Вопросы по темам дисциплины «Избранные главы теории чисел» (контролируемая компетенция ПКС - 1, ПКС - 4)

Тема 1. Целые числа специальных видов.

1. Совершенные числа.
2. Дружественные числа.
3. Треугольные числа.
4. Квадратные числа.
5. Пятиугольные числа.
6. Шестиугольные числа.
7. Двенадцатиугольные числа.
8. Многоугольные числа.
9. Тетраэдральные числа.

Тема 2. Простые числа специальных видов.

10. Количество простых чисел (теорема Евклида); оценка n -го простого числа; неравномерность распределения простых чисел.
11. Критерий простоты числа. Решето Эратосфена.

12. Две леммы о простых числах.
13. Основная теорема арифметики и ее следствия. Каноническое разложение числа.
14. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.
15. Простые числа, представимые суммой двух квадратов.
16. Простые числа Мерсенна и их связь совершенными числами.
17. Простые числа Ферма и их свойства.
18. Простые числа в некоторых последовательностях; теорема Дирихле.

Тема 3. Арифметические функции.

19. Функция числа простых чисел; результаты Чебышёва
20. Функции целой и дробной части и их свойства.
21. Мультипликативные функции и их свойства.
22. Применение функции целой части к разложению $n!$ на простые множители.
23. Порядок целого числа относительно простого числа как аналог логарифмической функции.
24. Функции числа делителей и суммы делителей.
25. Обобщение функции числа делителей.
26. Число целых точек внутри круга (теорема Гаусса).
27. Число целых точек под гиперболой (теорема Дирихле).

Тема 4. Сравнения и классы вычетов.

28. Понятие сравнения, свойства сравнений.
29. Полная и приведенная системы вычетов.
30. Классы вычетов и их свойства.
31. Линейное сравнение с одним неизвестным; способы решения.
32. Системы сравнений с одним неизвестным.

Критерии формирования оценок (оценивания) устного опроса

Устный опрос является одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Избранные главы теории чисел». Развёрнутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять определения.

3.5. Оценочные материалы для самостоятельной работы обучающегося (типовые задачи) (контролируемая компетенции ПКС - 1, ПКС - 4)

Перечень типовых задач для самостоятельной работы сформирован в соответствии с тематикой практических занятий по дисциплине «Избранные вопросы теории чисел».

Задачи

Тема 1. Целые числа специальных видов.

1. Проверить, что числа 220 и 284 являются дружественными.
2. Представить совершенное число 8128 суммой кубов натуральных чисел.
3. Выяснить, существуют ли треугольное число, равное 434.
4. Известно, что 117 - пятиугольное число. Найти следующее непосредственно за ним пятиугольное число.
5. Найти пятое совершенное число с обоснованием.
6. Данное треугольное число равно 120. Найти следующее за ним треугольное число.
7. Сумма двух последовательных треугольных чисел равна 81. Найти наибольшее из треугольных чисел.
8. Известно, что 496 есть шестиугольное число. Найти количество предшествующих ему шестиугольных чисел.

9. Разность двух последовательных квадратных чисел равна 65. Найти наименьшее из этих чисел.
10. Пятиугольное число расположено между числами 335 и 420. Найти это число.

Тема 2. Простые числа специальных видов.

1. Доказать, бесконечность множества простых чисел с помощью чисел Ферма.
2. Доказать, что числа Ферма попарно взаимно просты.
3. Доказать, критерии простоты числа.
4. Доказать, следующие свойства НОД:
 - а) $\text{НОД}(ka, kb) = k\text{НОД}(a, b)$;
 - б) Если δ – общий делитель чисел a и b , то $\text{НОД}\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = \frac{\text{НОД}(a, b)}{\delta}$.
5. Доказать, что $\text{НОД}(a, a + k) \mid k$.
6. Найти НОД чисел 46, 108, 24.
7. Найти линейное представление для НОД (54, 48).
8. Найти простые числа, лежащие между числами 100 и 150.
9. Найти простые числа, не превосходящие числа 120.
10. Доказать, что число $n^7 - n$ делится на 42.

Тема 3. Арифметические функции.

1. Найти наибольшую степень простого числа 3, делящий число сочетаний C_{1000}^{500} .
2. Найти число целых точек, расположенных под гиперболой $y = \frac{12}{x}$ в I четверти.
3. Установить простоту числа 661.
4. Найти число делителей числа 1728.
5. Найти сумму делителей числа 96.
6. Найти наивысший показатель степени числа 3, делящей 500!
7. Вычислить $\sum_{d \mid 160} \varphi(d)$, где φ – функция Эйлера.
8. Найти количество чисел, не превосходящих числа 300 и кратных числу 12.
9. Найти число четных делителей числа 1028.
10. Найти сумму четных делителей числа 84.

Тема 4. Сравнения и классы вычетов.

1. Образуют ли числа 3, 5, 9 и 12 полную систему вычетов по модулю 6.
2. Образуют ли числа 3, 5, 9 и 12 приведенную систему вычетов по модулю 6.
3. Сравнимы ли числа 54 и 90 по модулю 12?
4. Найти количество классов вычетов по модулю 24.
5. Найти количество приведенных классов вычетов по модулю 24.
6. Образуют ли числа 3, 5, 9 и 12 полную систему вычетов по модулю 8.
7. Образуют ли числа 3, 5, 9 и 12 приведенную систему вычетов по модулю 8.
8. Сравнимы ли числа 54 и 90 по модулю 16?
9. Решить сравнения $3x \equiv 18 \pmod{12}$.
10. Решить систему сравнений $\begin{cases} 5x \equiv 1 \pmod{3}, \\ 3x \equiv 10 \pmod{8}. \end{cases}$

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо изучить теоретический материал по соответствующим вопросам темы, использовать формулы, объяснение которых представлено в соответствующих темах.

4. Вопросы для зачета по дисциплине «Избранные вопросы теории чисел»

№	Вопрос	Код компетенции (согласно РПД)
1.	Теорема о делении с остатком в кольце Z .	ПКС-1, ПКС-4
2.	Теорема о существовании НОД в кольце Z .	ПКС-1, ПКС-4
3.	Теорема Евклида о простых числах.	ПКС-1, ПКС-4
4.	Функция ord_p и ее свойства.	ПКС-1, ПКС-4
5.	Основная теорема арифметики	ПКС-1, ПКС-4
6.	Делимость в кольце целых чисел	ПКС-1, ПКС-4
7.	Аналоги основной теоремы арифметики для других колец.	ПКС-1, ПКС-4
8.	Леммы о простых числах	ПКС-1, ПКС-4
9.	Теорема о мультипликативных функциях	ПКС-1, ПКС-4
10.	Функция Эйлера; соотношение Гаусса.	ПКС-1, ПКС-4
11.	Функция Мебиуса и ее свойства	ПКС-1, ПКС-4
12.	Произведение по Дирихле арифметических функций.	ПКС-1, ПКС-4
13.	Теоремы Эйлера и Ферма о сравнениях	ПКС-1, ПКС-4
14.	Теорема о системах сравнений с неизвестными	ПКС-1, ПКС-4
15.	Китайская теорема об остатках	ПКС-1, ПКС-4
16.	Линейные сравнения с одной неизвестной	ПКС-1, ПКС-4
17.	Классы вычетов; их свойства.	ПКС-1, ПКС-4
18.	Теорема о числе элементов конечного поля.	ПКС-1, ПКС-4
19.	Кольцо классов вычетов.	ПКС-1, ПКС-4
20.	Теорема о мультипликативной группе конечного поля.	ПКС-1, ПКС-4
21.	Критерий подполя конечного поля.	ПКС-1, ПКС-4
22.	Первообразные корни и исчисление индексов по простому модулю.	ПКС-1, ПКС-4
23.	Теорема о существовании конечного поля с заданным числом элементов.	ПКС-1, ПКС-4
24.	Способы построения конечных полей. Сравнения по двойному модулю.	ПКС-1, ПКС-4