МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ОПОП
_____________М.С. Нирова
«12» апреля 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

Программа специалитета
01.05.01 Фундаментальные математика и механика
(код и наименование программы специалитета)

Направленность (профиль)
Фундаментальная математика
(наименование направленности (профиля))

Квалификация (степень) выпускника
специалист

Форма обучения
очная

НАЛЬЧИК 2023г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень компетенций и этапы их формирования

Карта компетенции

Шифр и название компетенций:
- Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики (**ОПК-1**).

Индикаторы достижения компетенции ОПК-1:
ОПК – 1.1. Способен использовать при решении профессиональных задач знания, полученные при изучении дисциплин математических и (или) естественных наук.
ОПК – 1.2. Способен использовать существующие математические методы при решении задач профессиональной деятельности.

Общая характеристика компетенции

Тип компетенции: общепрофессиональная компетенция выпускника образовательной программы по направлению подготовки высшего образования 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, уровень ВО - специалитет.

1.1. Этапы формирования компетенций и средства оценивания

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины	Индикаторы достижений	Основные показатели оценки результатов обучения	Вид оценочного средства
ОПК-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	**ИД- ОПК 1.1** Способен использовать при решении профессиональ-ных задач знания, получения при изучении дисциплин математи-ческих и (или) естественных наук **ИД- ОПК 1.2.** Способен использовать существующие математические методы при решении задач профессиональной деятельности	**Знать** базовые понятия в области математики и их профессиональную терминологию. **Уметь** исследовать классические задачи в области математика и публично докладывать и объяснять фундамен-тальные результаты в соответствующих разделах математики **Владеть** навыками математического мыш-ления и строгого доказательства утвержд-ений в области	Оценочные материалы для контрольной работы Типовые тестовые задания Оценочные материалы для проведения коллоквиума Типовые оценочные материалы к экзамену

		математики, а также методологией решения основных задач соответствующих разделов математики..	

1.2. Критерии формирования оценок на различных этапах их формирования

Текущий и рубежный контроль

Этап (уровень)	Первый этап (уровень)	Второй этап (уровень)	Третий этап (уровень)
Баллы	36-50 баллов	51-60 баллов	61-70 баллов
Характеристика	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Частичное выполнение домашнего задания. Частичное выполнение заданий контрольных работ, тестовых заданий на оценку «удовлетворительно».	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение домашнего задания. Выполнение заданий на коллоквиуме на оценку «хорошо».	Полное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение домашнего задания, заданий контрольных работ. Выполнение заданий на коллоквиуме на оценку «отлично».

На первом (начальном) этапе формирования компетенции формируются знания, умения и навыки, составляющие базовую основу компетенции, без которой невозможно ее дальнейшее развитие. Обучающийся воспроизводит термины, факты, методы, понятия, принципы и правила; решает учебные задачи по образцу.

На втором (основном) этапе формирования компетенции приобретается опыт деятельности, когда отдельные компоненты компетенции начинают «работать» в комплексе и происходит выработка индивидуального алгоритма продуктивных действий, направленных на достижение поставленной цели. На этом этапе обучающийся осваивает аналитические действия с предметными знаниями по конкретной дисциплине, способен самостоятельно решать учебные задачи, внося коррективы в алгоритм действий, осуществляя координирование хода работы, переносит знания и умения на новые условия.

Третий (завершающий) этап – это овладение компетенцией. Обучающийся способен использовать знания, умения, навыки при решении задач повышенной сложности и в нестандартных условиях. По результатам этого этапа обучающийся демонстрирует итоговый уровень сформированности компетенции.

Промежуточная аттестация (экзамен)

Семестр	Шкала оценивания			
	Неудовлетворительно (36-60 баллов)	Удовлетворительно (61-80 баллов)	Хорошо (81-90 баллов)	Отлично (91-100 баллов)
3	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене не дал полного ответа ни на один вопрос, не сделал пример. Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ только на один вопрос, а пример сделан неправильно.	Студент имеет 36-50 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй, а пример сделан не верно. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на оба вопроса, а пример не сделан. Студент имеет по итогам текущего и рубежного контроля 61-70 баллов на экзамене не дал полного ответа ни на один вопрос. В решении примера есть грубая ошибка, которая повлияла на ответ, вследствие чего пример сделан не верно	Студент имеет 51-60 баллов по итогамтекущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопроси частично (полностью) ответил на второй. Пример сделан верно. Студент имеет 61 – 65 баллов по итогамтекущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопроси частично ответил на второй, и в примере есть недочеты, которые не повлияли на ответ. Студент имеет 66-70 баллов по итогамтекущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ только на один вопрос. В примере есть неточности, которые не повлияли на ответ.	Студент имеет 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй, и пример сделан правильно. Или же студент на оба вопроса ответил верно, а в задаче, есть неточности, которые не повлияли на ответ.

2. Методические материалы и типовые контрольные задания, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Перечень оценочных средств

№	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
1.	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2.	Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Фонд тестовых заданий
3.	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам

3. Перечень контрольных заданий и иных материалов, необходимых для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности

3.1. Вопросы для коллоквиумов

3 семестр

Вопросы для оценки компетенции «ОПК-1»:

Тема 1. Линейные алгебры, Линейная алгебра линейных операторов, матрица линейного оператора.

1.Линейные операторы и функционалы. Умножение линейных операторов.

2. Многочлен от линейного оператора. Вырожденные и невырожденные операторы.

3. Линейные алгебры. Изоморфизм алгебр. Линейная алгебра линейных операторов.

4. Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные векторы.

5. Матрица линейного оператора на пространстве, разложенном в прямую сумму инвариантных подпространств.

Тема 2. Циклическое подпространство. Характеристический многочлен линейного оператора. Корневые векторы, нильпотентные операторы

1. Циклическое подпространство и аннуляторы вектора

2. Характеристический многочлен линейного оператора; матрица линейного оператора на циклическом подпространстве и ее характеристический многочлен.

3. Теорема Гамильтона-Кэли.
4. Корневые векторы и корневые подпространства
5. Нильпотентные операторы

Тема 3. Полиномиальные матрицы.
1.Полиномиальные матрицы. Свойства
2. Жорданова клетка.
3. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора в комплексном и вещественном пространстве.

Тема 4. Сопряженный оператор, унитарные и ортогональные операторы.
1.Унитарные пространства. Свойства.
2. Ортогональные и унитарные матрицы.
3. Сопряженный, нормальный, унитарный и ортогональный операторы.
4. Диагонализируемые операторы. Операторы простого спектра и простой структуры.
5. Самосопряженные и симметрические операторы, их спектр

Тема 5. Аффинные пространства, плоскости в аффинном пространстве. Тензоры.
1. Аффинные (точечные) пространства; аффинные системы координат.
2. Плоскости в аффинном пространстве; их задание системами линейных уравнений
3. Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве.
4. Общее понятие о тензорах; координаты тензора
5. Операции над тензорами; свертка и след

Критерии формирования оценок по контрольным точкам (коллоквиум)

«отличный (высокий) уровень компетенции» (5 баллов) - ставится в случае, когда обучающийся демонстрирует знание теоретического материала на 100%;

«хороший (нормальный) уровень компетенции» (4 баллов) - ставится в случае, когда обучающийся демонстрирует знание теоретического материала на 70%;

«удовлетворительный (минимальный, пороговый) уровень компетенции» (3 балла) – ставится в случае, когда обучающийся затрудняется с правильной формулировкой теоретического материала, дает неполный ответ, демонстрирует знание теоретического материала на 50%;

«неудовлетворительный (ниже порогового) уровень компетенции» (2 и менее баллов) – ставится в случае, когда обучающийся дает неверную формулировкой теоретического материала, дает неверный ответ, демонстрирует незнание теоретического материала или знание материала менее чем на 40%.

3.2. Оценочные материалы для контрольной работы: **контролируемые компетенции ОПК-1.**

Вариант №1

1. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов $(1,2,2,-1), (1,1,-5,3), (3,2,8,-7)$.
2. Доказать, что векторы x, y унитарного пространства ортогональны тогда и только, когда $|\alpha x+\beta y|^2 = |\alpha x|^2 + |\beta y|^2$.

3. Какие квадратичные формы называются эквивалентными?

Вариант №2

1. Найти все линейные подпространства пространства многочленов от одного неизвестного степени $\leq n$ с вещественными коэффициентами, инвариантные относительно преобразования φ, переводящего любой многочлен в его производную.
2. Линейный оператор A в базисе e_1, e_2, e_3 задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти минимальный многочлен $g(\lambda)$ этого оператора.
3. Пусть$x -$ корневой вектор оператора A, относящийся к собственному значению λ_i и имеющий высоту $h > 0$. Доказать, что вектор $(A - \lambda_i E)x$ имеет высоту $h - 1$.

Вариант №3

1. Найти собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Доказать, что линейное преобразование комплексного пространства тогда и только тогда имеет диагональную матрицу в некотором базисе, когда все его корневые векторы являются собственными векторами.

Вариант №4

4. Привести $\lambda -$ матрицу к нормальной диагональной форме путем элементарных преобразований $\begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda^2 \\ 3\lambda & 3\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda \end{pmatrix}$.
5. Написать жорданову форму A_j матрицы A, если даны инвариантные множители $E_i(\lambda)(i = 1,2, \dots, n)$ ее характеристической матрицы $A - \lambda E$, если $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = E_3(\lambda) = 1, E_4(\lambda) = \lambda + 1, E_5(\lambda) = (\lambda + 1)^2, E_6(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$.
6. Ввести скалярное произведение в пространстве $R[x]_n$ многочленов степени $\leq n$ с действительными коэффициентами.

Вариант №5

1. Дайте определения нормального и канонического вида квадратичной формы.
2. Дайте определения собственного вектора и собственного значения.
3. Являются ли векторы $x_1 = (2,3 - 4, -6), x_2 = (1,8, -2, -16)$, $x_3 = (12,5, -14,5)$ попарно ортогональными?

Вариант №10

1. Дайте определение понятий: положительный и отрицательный индекс инерции. Сигнатура.
2. Какое пространство называется унитарным?

3. Являются ли система векторов $x_1 = (5,4,3), x_2 = (3,3,2), x_3 = (8,1,3)$ линейно зависимой?

Критерии формирования оценок по контрольным точкам (контрольные работы)

5 баллов - правильно выполнены все задания, продемонстрирован высокий уровень владения материалом, проявлены превосходные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

4 балла - правильно выполнена большая часть заданий, присутствуют незначительные ошибки, продемонстрирован хороший уровень владения материалом, проявлены средние способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

2 балла - задания выполнены менее чем наполовину, продемонстрирован неудовлетворительный уровень владения материалом, проявлены недостаточные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

1 балл - дан неполный ответ, представляющий собой разрозненные знания по теме вопроса существенными ошибками в определениях.

0 баллов - при полном несоответствии всем критериям и отсутствии ответа.

3.3. Типовые тестовые задания по дисциплине «Линейная алгебра» (контролируемая компетенция ОПК-1):

3 семестр

V1: top
V2: 3 точка.
V3: Собственные значения и собственные векторы линейного оператора
I: -
S: Собственные векторы линейного оператора, относящиеся к различным собственным значениям
+: линейно - независимы
-: линейно - зависимы
-: коллинеарные
-: попарно ортогональные
I: -
S: При умножении оператора на ненулевое число, его собственные векторы, относящиеся к собственному значению λ
+: не меняются
-: умножаются на λ
-: умножаются на α
-: умножаются на $\alpha\lambda$
I: -
S: Скалярный оператор является оператором
+: подобия
-: единичным
-: нулевым
-: проектирования

I: -
S: Оператор подобия является оператором
+: скалярным
-: проектирования
-: единичным
-: нулевым

V1: top
V2: 2 точка.
V3: Циклическое подпространство. Теорема Гамильтона-Кэли
I: -
S: Одномерное подпространство пространства векторов плоскости является циклическим относительно оператора
+: единичного
-: нулевого
-: подобия
-: поворота
I: -
S: Если $f(t)$ - характеристический многочлен оператора φ, то
+: $f(\varphi)=\theta$, где θ - нулевой оператор
-: $f(\varphi)=\varphi$
-: $f(\varphi)$ - нулевой вектор
-: $f(\varphi)=0$
I: -
S: Каждый линейный оператор является корнем
+: характеристического многочлена
-: минимального многочлена
-: нулевого многочлена
-: линейного многочлена
I: -
S: Сопровождающая матрица для нулевого многочлена является матрицей
+: вырожденной
-: нулевой
-: единичной
-: диагональной

V1: top
V2: 2 точка.
V3: Ортогональное дополнение
I: -
S: Ортогональное дополнение $(L_1+L_2)^{\perp}$ равно:
+: $L_1^{\perp}\cap L_2^{\perp}$
-: $L_1^{\perp}+L_2^{\perp}$

-: $L_1^{\perp} \cup L_2^{\perp}$

-: $L_2^{\perp} + L_1^{\perp}$

I: -

S: Ортогональное дополнение $(L_1 \cap L_2)^{\perp}$ равно:

+: $L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$

-: $L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$

-: $(L_1 + L_2)^{\perp}$

-: $L_1^{\perp} \cup L_2^{\perp}$

I: -

S: Если L_1, L_2 – подпространства унитарного пространства U и $L_1 \subseteq L_2$, то:

+: $L_2^{\perp} \subseteq L_1^{\perp}$

-: $L_1^{\perp} \subseteq L_2^{\perp}$

-: $L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} = L_1^{\perp}$

-: $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_2^{\perp}$

V1: top
V2: 1 точка.
V3: Линейные операторы
I: -
S: Ядро нулевого оператора пространства V состоит из:
+: пространства V
-: нулевого вектора
-: нулевого подпространства
-: пространства V без нулевого вектора
I: -
S: Ядро единичного оператора пространства V состоит из:
+: нулевого подпространства
-: пространства V
-: векторов базиса
-: нулевого вектора
I: -
S: Ядро невырожденного оператора пространства V совпадает с:
+: нулевым подпространством
-: пространством V
-: нулевым вектором
-: с базисом пространства V
I: -
S: При невырожденном линейном операторе линейно независимые векторы переходят в
+: линейно независимые векторы
-: линейно зависимые векторы
-: в нулевой вектор
-: векторы некоторого подпространства

I: -
S: При вырожденном линейном операторе базис пространства переходит в
+: линейно зависимую систему векторов
-: базис пространства
-: нулевой вектор
-: порождающую систему векторов

V1: top
V2: 1 точка.
V3: Линейные отображения пространств. Ядро и образ.
I: -
S: Ядро линейного отображения пространства S в пространство T есть:
+: подпространство пространства S
-: подпространство пространства T
-: нулевое подпространство пространства T
-: нулевое подпространство пространства S
I: -
S: Образ линейного отображения пространства S в пространство T есть:
+: подпространство пространства T
-: нулевое подпространство пространства S
-: все пространство T
-: множество ненулевых векторов пространства T
I: -
S: Ранг линейного отображения φ пространства S в пространство T есть:
+: размерность $\dim Im\,\varphi$
-: размерность пространства T
-: размерность пространства S
-: размерность $\dim\ker\varphi$
I: -
S: ДеS:ект линейного отображения φ пространства S в пространство T есть:
+: размерность $\dim\ker\varphi$
-: размерность пространства T
-: размерность $\dim Im\,\varphi$
-: размерность пространства S
I: -
S: Если φ - нулевое отображение пространства S в пространство T, то
+: $\ker\varphi = S$
-: $\ker\varphi$ - ненулевое подпространство пространства T
-: $\ker\varphi = T$
-: $\ker\varphi$ - нулевое подпространство пространства S
I: -

S: Отображение φ пространства S в пространство T над полем P является линейным, если:
+: $\varphi(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 \varphi x + \lambda_2 \varphi y \quad \forall x, y \in S, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in P$
-: $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y \quad \forall x, y \in S$
-: $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi x \quad \forall \lambda \in P$ и $\forall x \in S$
-: $\varphi(\lambda(x + y)) = \lambda \varphi(x) + \lambda \varphi(y) \quad \forall x, y \in S, \quad \forall \lambda \in P$

V1: top
V2: 1 точка.
V3: Инвариантные подпространства
I: -
S: Если любое подпространство инвариантно относительно оператора A, то оператор A
+: скалярный
-: вырожденный
-: невырожденный
-: ненулевой
I: -
S: Если подпространства L_1 и L_2 являются инвариантными относительно оператора φ, то их пересечение $L_1 \cap L_2$
+: инвариантно относительно φ
-: не инвариантно относительно φ
-: $L_1 \cap L_2 = \{\overline{0}\}$
-: содержится в $Jm\,\varphi$
I: -
S: Если подпространства L_1 и L_2 являются инвариантными относительно оператора φ, то их сумма $L_1 + L_2$
+: инвариантна относительно φ
-: не инвариантна относительно φ
-: содержится в $Jm\,\varphi$
-: равна $L_1 \cup L_2$

V1: top
V2: 1 точка.
V3: Алгебры над полем
I: -
S: В определении алгебры над полем объединены структуры:
+: векторного пространства и кольца
-: группы и кольца
-: группы и поля
-: векторного пространства и поля

I: -
S: Алгебра над полем называется коммутативной, если:
+: умножение коммутативно
-: сложение коммутативно
-: все три операции коммутативны
-: линейные операции коммутативны
I: -
S: Алгебра над полем называется ассоциативной, если:
+: умножение ассоциативно
-: сложение ассоциативно
-: линейные операции ассоциативны
-: все три операции ассоциативны
I: -
S: Алгебра матриц n- го порядка является:
+: ассоциативной
-: коммутативной
-: неассоциативной
-: бесконечномерной

V1: top
V2: 1 точка.
V3: Линейные операторы
I: -
S: Если линейные операторы φ и ψ заданы соответственно матрицами $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, то матрица оператора $2\varphi+\psi$ равна:
+: $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
-: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
-: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
-: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
I: -
S: Если линейные операторы φ и ψ заданы соответственно матрицами $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, то матрица оператора $3\varphi-2\psi$ равна:
+: $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

-: $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$
-: $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
-: $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$
I: -

S: Если линейные операторы φ и ψ заданы соответственно матрицами $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, то матрица оператора $-2\varphi + \psi$ равна:
+: $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
-: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$
-: $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
-: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$
I: -
S: Матрица нулевого оператора в любом базисе пространства является:
+: нулевой
-: невырожденной
-: обратимой
-: ортогональной
I: -
S: Матрица единичного оператора в любом базисе пространства V является:
+: единичной
-: вырожденной
-: необратимой
-: нулевой
I: -
S: Дефект невырожденного оператора n- мерного пространства равен:
+: 0
-: n
-: n-1
-: n-2
I: -
S: Невырожденным оператором в n- мерном пространстве является:
+: оператор подобия
-: нулевой оператор
-: оператор с ненулевой матрицей
-: оператор с нулевой матрицей

I: -
S: Образом линейно зависимой системы векторов при любом линейном операторе является:
+: линейно зависимая система
-: нулевой вектор
-: линейно независимая система
-: базис этой системы векторов
I: -
S: Образом единичного оператора пространства V является:
+: пространство V
-: нормированный вектор
-: нулевое подпространство
-: одномерное подпространство
I: -
S: Образом нулевого оператора пространства V является:
+: нулевое подпространство
-: нулевой вектор
-: пространство V
-: линейно независимая система векторов
I: -
S: Размерность пространства линейных операторов, действующих в 1- мерном пространстве, равна:
+: 1
-: 2
-: 4
I: -
S: Размерность пространства линейных операторов, действующих из пространства S в пространство T равна:
+: $dim\,S \cdot dim\,T$
-: $dim\,S + dim\,T$
-: $dim\,S$
-: $dim\,T$

V1: top
V2: 3 точка.
V3: Полиномиальные матрицы
I: -
S: Канонической λ - матрицей является
+: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda \end{pmatrix}$
-: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$
-: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}$

-: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$

I: -

S: Канонической λ - матрицей является

+: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$

-: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda^2-1 \end{pmatrix}$

-: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+3 \end{pmatrix}$

-: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$

I: -

S: Канонической - матрицей является

+: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$

-: $\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

-: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+4 \end{pmatrix}$

-: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$

V1: top

V2: 2 точка.

V3: Унитарное пространство

I: -

S: В унитарном пространстве любому вектору ортогонален:

+: нулевой вектор

-: нормированный вектор

-: ненулевой вектор

-: вектор, не принадлежащий подпространству

I: -

S: В унитарном пространстве любая ортогональная система ненулевых векторов является:

+: линейно независимой

-: линейно независимой над полем R

-: порождающей системой пространства

-: линейно зависимой над полем C

I: -

S: В унитарном пространстве U вектор x ортогонален сам себе, если:

+: x – нулевой вектор

-: x- нормированный вектор

-: x – ненулевой вектор

-: $(x, y) \neq 0 \quad \forall y \in U$

I: -

S: Длина вектора в унитарном пространстве обладает свойством:

+: $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$, $\lambda \in C$

-: $|\lambda x| = \lambda x$, где $\lambda \in C$

-: $|\lambda x| = \lambda |x|$, $\lambda \in C$

-: $|\lambda x| = \lambda^2 |x|$, $\lambda \in C$

I: -

S: Если λ-нормирующий множитель некоторого вектора из унитарного пространства, то нормирующим множителем для этого же вектора будет число:

+: $\lambda\mu, \text{где } |\mu| = 1$

-: $\lambda\mu \, \forall \mu \in R$

-: $\lambda\mu, \text{где } \mu = \sqrt{\lambda}$

-: $\lambda\mu, \text{где } |\mu| < 1$

I: -

S: Нормирующий множитель ненулевого вектора x унитарного пространства равен:

+: $\frac{i}{|x|}$

-: $\frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot i$

-: $\frac{1}{|x|}(1 + i)$

-: $\pm \frac{i}{\sqrt{|x|}}$

I: -

S: Нормирующий множитель вектора $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1 \right)$ унитарного пространства C^4 равен:

+: $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

-: $\frac{i + 1}{\sqrt{3}}$

-: $\pm i\sqrt{3}$

-: $i\sqrt{2}$

I: -

S: Неравенство Коши-Буняковского $|(x,y)|^2 \le |x|\cdot|y|$ в унитарном пространстве обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y:
+: пропорциональны
-: перпендикулярны
-: не перпендикулярны
-: не пропорциональны
I: -
S: Неравенство $|(x,y)|^2 \le (x,x)\cdot(y,y)$ в унитарном пространстве равносильно неравенству:
+: $|(x,y)| \le |x|\cdot|y|$
-: $(x,y) \le |x|\cdot|y|$
-: $(x,y) \le \sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$
-: $|(x,y)| \le |x|^2\cdot|y|^2$

V1: top
V2: 2 точка.
V3: Унитарное пространство
I: -
S: Комплексное координатное пространство C^2 ,будет унитарным, если, в нем скалярное произведение векторов $x=(\alpha_1,\alpha_2)\ u\ y=(\beta_1,\beta_2)$ определено равенством:
+: $\alpha_1\overline{\beta}_1+\alpha_2\overline{\beta}_2$
-: $\alpha_1\overline{\alpha}_2+\beta_1\beta_2$
-: $(\alpha_1+\beta_1)\cdot(\alpha_2+\beta_2)$
-: $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$
I: -
S: Пусть U - унитарное пространство. Тогда любое его подпространство:
+: будет унитарным
-: будет унитарным той же размерности
-: не будет унитарным
-: будет евклидовым
I: -
S: Пространство комплексных чисел C будет унитарным, если в нем скалярное произведение (a,b) векторов a*b определено равенством:
+: $(a,b)=a\cdot\overline{b}$
-: $(a,b)=|a|\cdot|b|$
-: $(a,b)=|a|\cdot|\overline{b}|$
-: $(a,b)=\overline{a}\cdot b$

V1: top
V2: 2 точка.

V3: Определитель Грама систем векторов
I: -
S: Определитель Грама системы ненулевых векторов евклидова пространства равен нулю, если эта система векторов является:
+: линейно зависимой
-: линейно независимой
-: ортогональной
-: ортонормированной
I: -
S: Определитель Грама системы ненулевых векторов евклидова пространства отличен от нуля, если эта система векторов является:
+: линейно независимой
-: линейно зависимой
-: ортогональной
-: ортонормированной
I: -
S: Если определитель Грама системы векторов евклидова пространства положителен, то эта система векторов является:
+: линейно независимой
-: линейно зависимой
-: системой с нулевым вектором
-: системой с пропорциональными
I: -
S: В определителе Грама векторов базиса евклидова пространства система строк является:
+: линейно независимой
-: линейно зависимой
-: ортогональной
-: системой с нулевой строкой
I: -
S: Определитель Грамма системы векторов (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1) пространства R^3 равен:
+: 1
-: 0
-: -1
-: -3

V1: top
V2: 2 точка.
V3: Ортогональные матрицы
I: -
S: Вещественная матрица Q является ортогональной, если:
+: $Q^T=Q^{-1}$
-: $Q^T=Q$
-: $Q^TQ^{-1}=E$
-: $Q^{-1}Q^T=E$
I: -
S: Вещественная матрица Q является ортогональной, если:
+: $QQ^T=E$, где E – единичная матрица
-: $Q^T=Q$
-: detQ=1

-: $|\det Q| = 1$
I: -
S: Множество ортогональных матриц n$^{\underline{\text{го}}}$ порядка образуют:
+: группу относительно умножения
-: кольцо относительно операций сложения и умножения
-: группу порядка n относительно умножения
-: полугруппу относительно операции сложения

I: -
S: К классу ортогональных матриц можно отнести:
+: вырожденные матрицы
-: невырожденные матрицы
-: единичную матрицу
-: нулевую матрицу
I: -
S: Если Q-ортогональная матрица, то:
+: detQ=±1
-: detQ=1
-: detQ=-1
-: detQ   1

V1: top
V2: 2 точка.
V3: Связь между ортонормированными базисами в унитарном пространстве
I: -
S: Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому такому же базису унитарного пространства является:
+: унитарной
-: ортогональной
-: вырожденной
-: диагональной
I: -
S: Если матрица перехода от ортонормированного базиса к некоторому второму базису унитарного пространства является унитарной, то 2$^{\underline{\text{ой}}}$ базис является:
+: ортонормированным
-: ортогональным, но не ортонормированным
-: не ортонормированным
-: не ортогональным
I: -
S: Матрица перехода от ортонормированного базиса к ортогональному базису унитарного пространства является:
+: невырожденной
-: ортогональной
-: унитарной
-: вырожденной
I: -
S: Матрица перехода от ортогонального базиса к другому ортогональному базису унитарного пространства является:
+: невырожденной

-: унитарной
-: ортогональной
-: вырожденной
I: -
S: Если T - матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису унитарного пространства, то:
+: $|\det T| = 1$
-: detT=0
-: detT=±1
-: $|\det T| > 1$

V1: top
V2: 2 точка.
V3: Следствия из аксиом унитарного пространства
I: -
S: В унитарном пространстве скалярное произведение обладает свойством:
+: $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$
-: $(x, y+z) = (x,z) + (y,z)$
-: $(x, y+z) = (x,z) + (y,z)$
-: $(x, y+z) = (x+y,z)$
I: -
S: В унитарном пространстве U скалярное произведение обладает свойством:
+: $(0,x) = 0 \in C$
-: $(0,x) \neq 0$
-: $(0,x) = 0 \in U$
-: $(0,x) \neq 0(x,0)$
I: -
S: В унитарном пространстве U скалярное произведение обладает свойством:
+: $(0,a) = (b,0)$ *при любых* a *и* $b \in U$
-: $(0,a) = (b,0)$ *только при* $a = b$
-: $(0,a) = (b,0)$ *только при линейнойзависимости* a *и* b
-: $(0,a) = (b,0)$ *при* $a \neq b$
I: -
S: В унитарном пространстве (x,y) скалярное произведение обладает свойством:
+: $(x, \alpha y) = (\overline{\alpha} x, y) \quad \forall \alpha \in C$
-: $(x, \alpha y) = \alpha (x,y) \quad \forall \alpha \in C$
-: $(x, \alpha y) = (\alpha x, y) \quad \forall \alpha \in C$
-: $(x, \alpha y) = |\alpha| \cdot (x,y) \quad \forall \alpha \in C$
I: -
S: В унитарном пространстве скалярное произведение обладает свойством:

+: $(x-y,z)=(x,z)-(y,z)$
-: $(x-y,z)=(x,-y+z)$
-: $(x-y,z)=-(x+y,z)$
-: $(x-y,z)=-(x,y+z)$

V1: top
V2: 2 точка.
V3: Унитарные матрицы
I: -
S: Комплексная матрица Q является унитарной, если:
+: $\overline{Q^T}=Q^{-1}$
-: $Q^T=Q$
-: $Q^TQ^{-1}=E$
-: $Q^{-1}Q^T=E$
I: -
S: Комплексная матрица Q является унитарной, если:
+: $Q\overline{Q^T}=E$, где E – единичная матрица
-: $Q^T=Q$
-: $\overline{Q}=Q^T$
-: $|\det Q|=1$
I: -
S: Множество унитарных матриц n-го порядка образуют:
+: группу относительно операции умножения
-: группу относительно операции сложения
-: группу порядка n относительно операции умножения
-: полугруппу относительно операции сложения
I: -
S: Если Q - унитарная матрица, то:
+: $|\det Q|=1$
-: detQ=0
-: $\det Q=\pm 1$
-: $(\det Q)^2=1$
I: -
S: К классу унитарных матриц можно отнести:
+: единичную матрицу
-: вырожденные матрицы
-: нулевую матрицу
-: невырожденные матрицы
I: -
S: Множество унитарных матриц $n^{\underline{го}}$ порядка образуют:
+: группу относительно операции умножения
-: поле относительно операций сложения и умножения

-: векторное пространство относительно операций сложения и умножения на комплексные числа
-: группу порядка n относительно операции умножения

V1: top
V2: 3 точка.
V3: Ортогональные операторы
I: -
S: Если А – ортогональный оператор, то его матрица в любом ортонормированном базисе является:
+: ортогональной
-: скалярной
-: унитарной
-: единичной
I: -
S: Множество всех ортогональных операторов образуют:
+: группу относительно умножения
-: группу относительно сложения
-: поле относительно сложения и умножения
-: кольцо относительно сложения и умножения
I: -
S: Ортогональным оператором является:
+: единичный оператор
-: оператор подобия
-: скалярный оператор
-: нильпотентный оператор
I: -
S: Матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе является:
+: ортогональной
-: унитарной
-: единичной
-: нулевой
I: -
S: Оператор ортогонален, если он является:
+: сохраняющим длины векторов
-: симметрическим
-: нильпотентным
-: диагонализируемым

V1: top
V2: 3 точка.
V3: Самосопряженный и симметрический оператор
I: -

S: Собственные векторы самосопряженного оператора, относящиеся к различным собственным значениям
+: ортогональны
-: линейно зависимы
-: ортонормированны
-: коллинеарны
I: -
S: Оператор A является самосопряженным, то самосопряженным будет и оператор:
+: A^*
-: $A-\lambda E$
-: A^{-1}
-: $A+\lambda E$
I: -
S: Если A и B - самосопряженные операторы, то $A\cdot B$ является самосопряженным, если:
+: $A\cdot B=BA$
-: $A\cdot B\neq BA$
-: $A\cdot B=A^*B^*$
-: $A\cdot B=B^*A^*$
I: -
S: Собственные значения симметрических операторов являются:
+: вещественными
-: комплексными
-: положительными
-: неотрицательными
I: -
S: Матрица симметрического оператора в ортонормированном базисе является:
+: симметричной
-: диагональной
-: скалярной
-: ортогональной
I: -
S: Собственные векторы симметрического оператора, относящиеся к различным собственным значениям:
+: ортогональны
-: линейно зависимы
-: ортонормированны
-: коллинеарны
I: -
S: Оператор А является симметрическим, если он:
+: диагонализируемый
-: нильпотентный
-: невырожденный
-: вырожденный
I: -
S: Оператор А является симметрическим, если:

+: $A^* = A$

-: $A + A^* = \theta$, где θ - нулевой оператор

-: $A^* = -A$

-: $AA^* = A^*A$

V1: top

V2: 3 точка.

V3: Сопряженный оператор

I: -

S: Если E - единичный оператор, то сопряженный ему оператор E^* есть оператор:

+: единичный

-: нулевой

-: вырожденный

-: нильпотентный

I: -

S: Сопряженность операторов A и B в евклидовом пространстве обладает свойством:

+: $(AB)^* = B^*A^*$

-: $(AB)^* = A^*B^*$

-: $(AB)^* = (BA)^*$

-: $(AB)^* \neq B^*A^*$

I: -

S: Если θ - нулевой оператор, то сопряженный ему оператор θ^* есть оператор:

+: нулевой

-: единичный

-: невырожденный

-: ненулевой

I: -

S: Если A оператор – оператор в унитарном пространстве и A^* сопряженный ему оператор, то для любого $\lambda \in C$:

+: $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$

-: $(\lambda A)^* = \lambda A^*$

-: $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}^{-1} A^*$

-: $(\lambda A)^* = -\lambda A^*$

Критерии формирования оценок по тестовым заданиям:

По итогам выполнения тестовых заданий оценка производится по пятибалльной шкале. При правильных ответах на:

- 89-100% заданий – «5» (баллов);
- 70-88% заданий – «4» баллов);
- 50-69% заданий – «3» (балла);
- 30-49% заданий – «2» (балла);
- 10-29% заданий – «1» (балл);
- менее 10% заданий – «0» (баллов).

4. Вопросы к экзамену по дисциплине «Линейная алгебра»

3 семестр

№	Вопрос	Код компетенции (согласно РПД)
1.	Линейные операторы. Матрица линейного оператора.	ОПК-1
2.	Пространства функций. Двойственное линейное пространство.	ОПК-1
3.	Пространство линейных операторов.	ОПК-1
4.	Умножение линейных операторов. Многочлен от линейного оператора.	ОПК-1
5.	Вырожденные и невырожденные линейные операторы.	ОПК-1
6.	Линейные алгебры. Изоморфизм алгебр.	ОПК-1
7.	Алгебра линейных операторов.	ОПК-1
8.	Инвариантные подпространства.	ОПК-1
9.	Инвариантность ядра и образа линейного оператора.	ОПК-1
10.	Собственные значения и собственные векторы.	ОПК-1
11.	Матрица линейного оператора на пространстве разложенном в прямую сумму подпространств.	ОПК-1
12.	Циклическое подпространство.	ОПК-1
13.	Аннуляторы вектора.	ОПК-1
14.	Характеристический многочлен линейного оператора.	ОПК-1
15.	Матрица линейного оператора на циклическом подпространстве.	ОПК-1
16.	Теорема Гамильтона-Кэли.	ОПК-1
17.	Корневые векторы и корневые подпространства.	ОПК-1

18.	Нильпотентные операторы, их свойства.	ОПК-1
19.	Нильпотентная Жорданова клетка.	ОПК-1
20.	Каноническая Жорданова форма матрицы линейного оператора.	ОПК-1
21.	λ - матрица. Теорема о канонической-матрице.	ОПК-1
22.	Основная теорема о подобии матриц; связь с характеристическими матрицами.	ОПК-1
23.	Жорданова нормальная форма.	ОПК-1
24.	Приведение матрицы к жорданово нормальной форме.	ОПК-1
25.	Унитарные пространства, их свойства.	ОПК-1
26.	Неравенство Коши-Буняковского для унитарных пространств.	ОПК-1
27.	Ортогональные и унитарные матрицы.	ОПК-1
28.	Сопряженный оператор; существование и единственность.	ОПК-1
29.	Теорема о произведении самосопряженных операторов.	ОПК-1
30.	Теорема о собственных значениях самосопряженного оператора.	ОПК-1
31.	Нормальные операторы. Способ получения бесконечной серии нормальных операторов.	ОПК-1
32.	Теорема о собственных векторах нормального оператора.	ОПК-1
33.	Диагонализируемые операторы.	ОПК-1
34.	Операторы простой структуры, их диагонализируемость.	ОПК-1
35.	Унитарные операторы. Критерий унитарности линейного оператора.	ОПК-1
36.	Теорема о матрице унитарного оператора.	ОПК-1
37.	Критерий унитарности нормального оператора.	ОПК-1
38.	Ортогональные операторы. Критерий ортогональности линейного оператора.	ОПК-1
39.	Аффинные (точечные) пространства; аффинные системы координат.	ОПК-1
40.	Плоскость в аффинном пространстве; их задание системами линейных уравнений	ОПК-1

Форма экзаменационного билета
по учебной дисциплине

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

Кафедра – Алгебры и дифференциальных уравнений
Дисциплина – Линейная алгебра
Направление подготовки – 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, 2 курс

Экзаменационный билет №1

1. Определение унитарного пространства; примеры.
2. Невырожденные и вырожденные линейные операторы.
3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Руководитель ОПОП ___________ /______________/

Зав. кафедрой А и ДУ __________ / _____________/