Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ОПОП
_________ М.С. Нирова
«12» апреля 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ»
(код и наименование дисциплины)

Программа специалитета
01.05.01 Фундаментальные математика и механика
(код и наименование программы специалитета)

Направленность (профиль)
Фундаментальная математика
(наименование направленности (профиля))

Квалификация (степень) выпускника
специалист

Форма обучения
очная

Нальчик 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы, описание показателей, критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования3

2. Методические материалы и типовые контрольные задания, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы5

3. Перечень контрольных заданий и иных материалов, необходимых для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности5

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы, описание показателей, критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Карта компетенции

Шифр и название компетенций: *способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики (ОПК-1).*

Индикаторы достижения компетенции ОПК-1:

ОПК-1.1. Способен использовать при решении профессиональных задач знания, полученные при изучении дисциплин математических и (или) естественных наук.

ОПК-1.2. Способен использовать существующие математические методы при решении задач профессиональной деятельности.

Общая характеристика компетенции

Тип компетенции: общепрофессиональная компетенция выпускника образовательной программы по направлению специалитета 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, уровень ВО - специалитет.

1.1. Этапы формирования компетенций и средства оценивания

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины	**Индикаторы достижения компетенции**	**Основные показатели оценки результатов обучения**	**Вид оценочного средства**
ОПК-1. Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.	**ОПК-1.1.** Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики. **ОПК-1.2.** Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.	**Знать** Знает актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики. **Уметь о**существлять выбор методов решения задач фундаментальной математики. **Владеет** навыками формализации актуальных задач фундаментальной математики и применения подходящих методов их решения.	Оценочные материалы для практических занятий. Оценочные материалы для коллоквиума. Оценочные материалы для проведения тестирования. Оценочные материалы для промежуточной аттестации

1.2. Критерии формирования оценок на различных этапах их формирования

Текущий и рубежный контроль

Этап (уровень)	**Первый этап (уровень)**	**Второй этап (уровень)**	**Третий этап (уровень)**
Баллы	**36-50 баллов**	**51-60 баллов**	**61-70 баллов**

Характеристика	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Частичное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценку «удовлетворительно».	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «хорошо».	Полное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических занятий. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «отлично».

На первом (начальном) этапе формирования компетенции формируются знания, умения и навыки, составляющие базовую основу компетенции, без которой невозможно ее дальнейшее развитие. Обучающийся воспроизводит термины, факты, методы, понятия, принципы и правила; решает учебные задачи по образцу.

На втором (основном) этапе формирования компетенции приобретается опыт деятельности, когда отдельные компоненты компетенции начинают «работать» в комплексе и происходит выработка индивидуального алгоритма продуктивных действий, направленных на достижение поставленной цели.

На этом этапе обучающийся осваивает аналитические действия с предметными знаниями по конкретной дисциплине, способен самостоятельно решать учебные задачи, внося коррективы в алгоритм действий, осуществляя координирование хода работы, переносит знания и умения на новые условия.

Третий (завершающий) этап – это овладение компетенцией. Обучающийся способен использовать знания, умения, навыки при решении задач повышенной сложности и в нестандартных условиях. По результатам этого этапа обучающийся демонстрирует итоговый уровень сформированности компетенции.

Промежуточная аттестация (зачет)

Оценка	**Незачтено**	**Зачтено**
Баллы	**36-60**	**61-70**
Характеристика	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачёте не ответил ни на один вопрос.	Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете представил полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на оба вопроса. Студенту, имеющему 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля,

		выставляется отметка «зачтено» без сдачи зачёта.

2. Методические материалы и типовые контрольные задания, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Перечень оценочных средств

№	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
1.	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2.	Задача (практическое задание)	Средство оценки умения применять полученные теоретические знания в практической ситуации. Задача (задание) должна быть направлена на оценивание тех компетенций, которые подлежат освоению в данной дисциплине, должна содержать четкую инструкцию по выполнению или алгоритм действий.	Комплект задач и заданий
3.	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам
4.	Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Фонд тестовых заданий

3. Перечень контрольных заданий и иных материалов, необходимых для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности

3.1. Вопросы по темам дисциплины «Математическое моделирование в механике» (контролируемая компетенция ОПК-1)

Тема 1. Математические модели

1. Динамические системы.
2. Автономные дифференциальные уравнения.
3. О глобальной разрешимости задачи Коши и единственности решения.
4. Динамические системы с дискретным временем.
5. Интегралы и законы сохранения.
6. Неавтономные дифференциальные уравнения.

7. Интегро-дифференциальные уравнения.

8. Декартово произведение динамических систем и разбиение системы на независимые подсистемы.

9. Производные и градиенты.

Тема 2. Механика

1. Принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа II рода.
2. Лагранжианы материальных частиц.
3. Законы сохранения в механике.
4. Принцип Гамильтона для систем со связями.
5. Принцип наименьшего действия Мопертюи (Мопертюи–Эйлера–Лагранжа–Якоби).
6. Применение принципа Гамильтона в механике сплошной среды.
7. Принцип Гамильтона и конечномерные аппроксимации бесконечномерных систем.
8. Динамика гибкой нерастяжимой нити.
9. Уравнение колебаний струны.
10. Специальная теория относительности Эйнштейна.
11. Каноническая гамильтонова форма уравнений механики.
12. Силы трения. Диссипация энергии.

Тема 3. Элементы статистической механики

1. О законах термодинамики.
2. Теоремы Пуанкаре о возвращении.
3. Гидродинамическая интерпретация систем дифференциальных уравнений и теорема Лиувилля.
4. Распределение Гиббса.
5. Статистическая механика идеального газа.
6. Метод Лапласа асимптотической оценки интегралов.
7. Градиентные системы.
8. Малые колебания механической системы около положения равновесия.
9. Статистическая механика твердого тела.

Критерии формирования оценок (оценивания) устного опроса.

В результате устного опроса знания, обучающегося оцениваются по следующей шкале:

4 балла, ставится, если обучающийся:

1) полно излагает изученный материал, даёт правильное определенное экономических понятий;

2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;

3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

3 балла, ставится, если обучающийся даёт ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для балла «1», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1-2 недочёта в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

2-1 балл, ставится, если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий;

2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;

3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

0 баллов, ставится, если обучающийся обнаруживает незнание большей части соответствующего раздела изучаемого материала, допускает ошибки в формулировке.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

3.2. Практические задания для самостоятельной работы обучающегося (контролируемая компетенция ОПК-1)

Тема 1. Математические модели

1. Докажите, что для скалярного уравнения

$$\dot{x} = a_1 x + a_2 x^2 + a_n x^n$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ - вещественные параметры) глобальная разрешимость на всей оси времени имеет место тогда и только тогда, когда $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$.

Докажите также, что при $n > 1$и $a_n \neq 0$ глобальная разрешимость для положительных времен $t \geq 0$ имеет место в том и только в том случае, когда n - нечетно, и при этом $a_n < 0$.

2. Найдите априорную оценку решения и докажите глобальную разрешимость задачи Коши для уравнения в R^n

$$\dot{x} = F(x, t)$$

с ограниченной правой частью: задана оценка $|F(x,\ t)| \leq M(t)$, где $M(t)$ - известная функция, определенная для всех $t \in R$, а $x \in R^n$ - произвольная точка.

3. Докажите, что если потенциальная энергия $V(x)$ ограничена снизу (так что $V(x) \geq h$ для всех $x \in R^n$ при известной постоянной h), то для обобщенного уравнения 2-го закона Ньютона

$$\ddot{x} = -\mathrm{grad} V(x)$$

справедлива теорема о глобальной разрешимости. Сохраняется ли этот результат после введения внешней силы $F(t)$ - для уравнения

$$\ddot{x} = -\mathrm{grad} V(x) + F(t).$$

4. Рассмотрите скалярное уравнение

$$\ddot{x} = -\frac{\mathrm{dV}(x)}{\mathrm{dx}}$$

при $V(x) = \mathrm{ax}^m$. При каких a и m возможен коллапс?

5. Приведите пример уравнения вида $\dot{x} = F(x, t)$ на плоскости R^2 такого, что поле F(x) непрерывно, ни в одной точке не имеет производной, не удовлетворяет условию Осгуда, но тем не менее решение задачи Коши существует и единственно.

6. Найдите и нарисуйте интегральную воронку решений задачи Коши

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x}, x(0) = 0.$$

7. Возможно ли, что единственность решения имеет место для отрицательных t и ее нет для положительных t (присмотритесь к предыдущему примеру).

8. Доказать, что для скалярного уравнения

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = f(x, t)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$ в случае коллапса при $t = t \quad > 0$ решение $x(t)$ стремится к бесконечности определенного знака, то есть либо $x(t) \to +\infty$, либо $x(t) \to -\infty$ при $t \to t_* - 0$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Математические модели». Основная цель сформировать навыки решения задач по данной теме.

Тема 2. Механика

1. Доказать, что уравнение движения, отвечающее кинетической энергии T и потенциальной энергии V вида

$$T = \frac{1}{2}\int_F \rho(x)u_t^2\,\mathrm{dx}, V = \frac{c^2}{2}\int_D (\nabla u)^2\mathrm{dx} + \int_D \Phi(u,t)\mathrm{dx}$$

имеет вид

$$\rho(x)u_{\mathrm{tt}} = c^2\Delta u - F(u,t),$$

где $F(u,t) = \frac{\partial\Phi(u,t)}{\partial u}$.

Убедитесь в том, что в случае

$$\Phi(u,t) = \frac{\gamma}{4}u^4 - f(x,t)u$$

это уравнение превращается в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u - \gamma u^3 + f(x,t).$$

2. Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{\mathrm{tt}} = c^2\Delta u$$

в ограниченной области $D \subset R^n$ с краевым условием третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = \sigma(x)u + g(x).$$

Докажите, что это уравнение имеет интеграл

$$E = \frac{1}{2}\int_D u_t^2\mathrm{dx} + \frac{c^2}{2}\int_D(\nabla u)^2\mathrm{dx} - \frac{c^2}{2}\int_{\partial D}\sigma u^2\mathrm{dS} - c^2\int_{\partial D}\mathrm{gudS}.$$

3. Докажите, что уравнение малых поперечных колебаний упругой пластины

$$u_{\mathrm{tt}} = -k\Delta^2 u,$$

например, с краевыми условиями

$$u|_{\partial D} = 0, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0$$

может быть получено из принципа Гамильтона, если определить потенциальную энергию равенством

$$V = \frac{k}{2}\int_D(\Delta u)^2\mathrm{dx}.$$

4. Докажите, что в случае $\Phi(u) = \int_D \rho(x)|u(x)|^\alpha\mathrm{dx}$ при $\alpha > 1$ и регулярной функции $\rho(x)$ функциональная производная имеет вид

$$\frac{\delta\Phi(u)}{\delta u(x)} = \alpha\rho(x)|u(x)|^{\alpha-1}\mathrm{sgn}u(x) = \alpha\rho(x)|u(x)|^{\alpha-2}u(x).$$

5. Докажите, что галеркинская система

$$\ddot{u}_k = -c^2\lambda_k u_k - \gamma\sum_{k_1,k_2,k_3=1}^{m} c_{k_1,k_2,k_3}u_{k_1}u_{k_2}u_{k_3} + f_k(t), k = 1,2,\ldots,m$$

обладает интегралом энергии

$$E_m = T_m + V_m.$$

Пользуясь этим, докажите, что задача Коши для данной системы глобально разрешима для положительных t.

6. Докажите, что гамильтонову систему

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, i = 1,\ldots,n,$$

можно записать в виде

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}, \dot{q}_i = \{q_i, H\},$$

или, вводя очевидные векторные обозначения,

$$\dot{p} = \{p, H\}, \dot{q}_i = \{q, H\}.$$

7. Докажите, что если бы скобка Пуассона обладала свойством ассоциативности, то отсюда следовало бы тождество Якоби.

8. Докажите тождество Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

9. Из тождества Якоби $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ выведите утверждение Пуассона: вместе с двумя интегралами F и G, также их скобка Пуассона $\{F, G\}$ есть интеграл.

10. Докажите, что для любых трех гладких функций F, G, K от p и p в случае, когда K обращается в ноль вне некоторого шара, справедливо равенство

$$\int_{R^{2n}} \{G, F\}\mathrm{Kdpdq} = \int_{R^{2n}} F\{K, G\}\mathrm{Kdpdq}.$$

Отсюда следует, что в случае недифференцируемой функции F скобке Пуассона $\{F, G\}$ можно придать смысл обобщенной функции — распределения.

11. Докажите, что преобразование Лежандра переводит выпуклые функции в выпуклые. Более того, справедливо равенство $g_{\mathrm{uu}}(u, y) = f_{\mathrm{xx}}(x, y)$ в обозначениях

$$d(\mathrm{xu} - f) = \mathrm{xdu} - \mathrm{vdy}, \quad g(u, y) = \mathrm{xu} - f.$$

12. Запишите интегралы импульса и момента импульса для гамильтоновой формы второго закона Ньютона $\dot{p} = -\mathrm{grad}V(x), \dot{x} = M^{-1}p$ в условиях, когда все они существуют. Найдите их скобки Пуассона. Докажите, что эти 6 интегралов порождают алгебру Ли, так что новых интегралов этим способом получить не удается.

13. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = -\mathrm{Ax}$ в гильбертовом пространстве H. Предположим, что A самосопряженный оператор, и его спектр состоит из положительных собственных значений $\lambda_1,\dots,\lambda_k,\dots$, причем $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, а также предельной точки 0. Докажите, что все решения этого уравнения стремятся к нулю при $t \to \infty$, но могут стремиться к нулю сколь угодно медленно: какова бы ни была положительная функция $\rho(t)$, определенная при $t > 0$, найдется такое решение данного уравнения, для которого выполнено предельное равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\|x(t)\|}{\rho(t)} = +\infty.$$

Указание. Докажите, что эволюционный оператор $U(t)$ этого уравнения при $t \to +\infty$ стремится к нулю поточечно, но неравномерно. Примените теорему Банаха–Штейнгауза.

14. Докажите, что всякое решение уравнения теплопроводности

$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ во всем пространстве R^n с условием $u|_\infty = 0$ и с начальным условием $u(x, 0) = \phi(x)$, причем $\phi \in L_2(R^n)$, стремится к нулю при $t \to +\infty$ по норме L_2: $\int_{R^n} u^2(x, t)\mathrm{dx} \to 0$, причем эта сходимость может быть сколь.

15. Пусть D есть угол на плоскости, определяемый в полярных координатах (r, θ) неравенством $0 < \theta < \alpha$, где $0 < \alpha < 2\pi$. Докажите, что неравенство Фридрихса в этом случае уже несправедливо, но для любой функции u, исчезающей на границе, справедливо неравенство

$$\int_D \frac{u^2}{r^2}\,\mathrm{dx} \le \mu \int_D |\nabla u|^2 \mathrm{dx},,$$
причем μ — положительная постоянная, зависящая только от α, но не от функции u. Сформулируйте и докажите аналогичный результат для случая, когда D — конус в R^n.

16. Докажите, что всякая функция, определенная на пространстве R^3, непрерывно дифференцируемая и затухающая на бесконечности, удовлетворяет неравенству Лерэ

$$\int_{R^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|^2}\,\mathrm{dx} \le 4 \int_{R^3} |\nabla u|^2 \mathrm{dy},$$

если интеграл в правой части сходится; $x \in R^3$ - произвольная точка.

Указание. Рассмотрите интеграл

$$\int_{R^3} u(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \frac{x_i - y_i}{|x-y|}\,\mathrm{dy}.$$

Примените интегрирование по частям и неравенство Коши–Буняковского.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Механика». Основная цель сформировать навыки решения прикладных задач.

Тема 3. Элементы статистической механики

1. Пусть D — ограниченная область с гладкой границей S. Предположим, что гладкое в замкнутой области $\bar{D}$ поле $v(x,\ t)$ для любого t касается поверхности S (имеет на S нулевую нормальную компоненту). Докажите, что в этом случае задача Коши

$\dot{x} = v(x,t), x(0) = a$

глобально однозначно разрешима. Докажите также, что в случае неограниченной области D это утверждение становится уже неверным, но будет все-таки верным, если на бесконечности поле v растет не быстрее, чем линейно.

2. Применяя формулу дифференцирования определителя по параметру, докажите, что якобиан $J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)$, где $x = x(a,\ t)$ — решение задачи Коши $\dot{x} = v(x,t), x(0) = a$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{dJ}}{\mathrm{dt}} = J \mathrm{div} v.$$

3. Докажите формулу

$$\mathrm{div} \rho v = \rho \mathrm{div} v + v \cdot \nabla \rho$$

и установите совпадение уравнений $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \rho v = 0$ и $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathrm{div} v = 0$.

4. Докажите, что скалярное уравнение $\dot{x} = -x$ не имеет инвариантной плотности.

5. Какими свойствами должен обладать спектр $n \times n$ матрицы A, чтобы линейное дифференциальное уравнение $\dot{x} = \mathrm{Ax}$ в R^n допускало инвариантную плотность. (Ответ покажет Вам, сколь редким свойством является наличие инвариантной плотности.)

6. Докажите, что максимум энтропии вероятностной системы с n состояниями достигается при $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. При этом $S = \ln n$.

7. Докажите, что для идеального газа выполняется равенство

$$\left\langle \frac{p_s^{j^2}}{2m_j} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{kT}.$$

8. Пусть $\xi_1,...,\xi_m$- случайные величины (т. е. функции на пространстве $(X,\ \mu)$ с вероятностной мерой μ). Если условие $\langle \xi_i \xi_j \rangle = 0$ выполнено всякий раз, когда $i \neq j$, то справедлива формула для дисперсий

$$D(\sum_{i=1}^{m} \xi_i) = \sum_{i=1}^{m} D(\xi_i).$$

9. Докажите, что для любого линейного оператора $B: R^n \to R^n$ справедлива формула

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}|_{t=0}\det(I + \mathrm{tB}) = \mathrm{sp}B.$$

Для этого припомните, как выводится формула Лиувилля для вронкскиана, и примените правило дифференцирования определителей.

10. Докажите, что если A и B — линейные операторы в R^n, причем, оператор A обратим, то справедлива формула

$\frac{d}{\mathrm{dt}}|_{t=0}\det(A + \mathrm{tB}) = \det A \mathrm{sp}(A^{-1}B).$

Здесь нужно воспользоваться результатом предыдущего упражнения и тем фактом, что определитель произведения операторов равен произведению определителей операторов.

11. Вычислите интеграл

$$\int_{R^n} (\mathrm{Bx}, x)^2 e^{-(\mathrm{Ax},x)} \mathrm{dx},$$

где A - положительно определенный оператор.

12. Докажите равенство

$$\int_{R^n} (\mathrm{Bx}, x)(\mathrm{Cx}, x) e^{-(\mathrm{Ax},x)} \mathrm{dx} = \det A[\mathrm{sp}(A^{-1}B)\mathrm{sp}(A^{-1}C) - \mathrm{sp}(A^{-1}\mathrm{BA}^{-1}C)]$$

13. Пусть $H = R^3$, потенциал $S(x) = \frac{1}{2}x_1^2$, а поле $F(x) = (0, x_1^2 + 1, x_1^2 + 1)$. Проверьте, что уравнение $\mathrm{grad}S(x) = 0$в этом случае имеет решения, которые не являются решениями уравнения $\mathrm{grad}S(x) + F(x) = 0$. Более того, последнее уравнение, вообще, не имеет решений. Попытайтесь обобщить этот пример.

14. Докажите, что для потенциальности гладкого поля $G(x)$ в H необходимо и достаточно, чтобы для любого x производная $G'(x)$ была симметричным оператором, т. е. выполнялось равенство

$$(G'(x)\xi, \eta) = (\xi, G'(x)\eta), \xi, \eta \in H.$$

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «*Элементы статистической механики*». Основная цель сформировать навыки решения задач по данной теме.

Критерии формирования оценок по заданиям для самостоятельной работы студента (типовые задачи):

«отлично» (4 балла) - обучающийся показал глубокие знания материала по поставленным вопросам, грамотно, логично его излагает, структурировал и детализировал информацию, избегая простого повторения информации из текста, информация представлена в переработанном виде. Свободно использует необходимые формулы при решении задач;

«хорошо» (3 балла) - обучающийся твердо знает материал, грамотно его излагает, не допускает существенных неточностей в процессе решения задач;

«удовлетворительно» (2 балла) - обучающийся имеет знания основного материала по поставленным вопросам, но не усвоил его деталей, допускает отдельные неточности при решении задач;

«неудовлетворительно» (менее 1 балла) – обучающийся допускает грубые ошибки в ответе на поставленные вопросы и при решении задач.

3.3. Оценочные материалы для контрольной работы (контролируемая компетенция ОПК-1)

Рейтинговая контрольная точка № 1

Вариант №1

Найдите априорную оценку решения и докажите глобальную разрешимость задачи Коши для уравнения в R^n

$$\dot{x} = F(x, t)$$

с ограниченной правой частью: задана оценка $|F(x,\ t)| \leq M(t)$, где $M(t)$ - известная функция, определенная для всех $t \in R$, а $x \in R^n$ - произвольная точка.

Вариант №2

Найдите и нарисуйте интегральную воронку решений задачи Коши

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x}, x(0) = 0.$$

Вариант №3

Докажите, что всякая функция, определенная на пространстве R^3, непрерывно дифференцируемая и затухающая на бесконечности, удовлетворяет неравенству Лерэ

$$\int_{R^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|^2} \mathrm{dx} \leq 4 \int_{R^3} |\nabla u|^2 \mathrm{dy},$$

если интеграл в правой части сходится; $x \in R^3$ - произвольная точка

Вариант №4

Докажите, что в случае $\Phi(u) = \int_D \rho(x)|u(x)|^\alpha \mathrm{dx}$ при $\alpha > 1$ и регулярной функции $\rho(x)$ функциональная производная имеет вид

$$\frac{\delta\Phi(u)}{\delta u(x)} = \alpha\rho(x)|u(x)|^{\alpha-1}\mathrm{sgn} u(x) = \alpha\rho(x)|u(x)|^{\alpha-2}u(x).$$

Рейтинговая контрольная точка № 2

Вариант №1

Докажите, что уравнение малых поперечных колебаний упругой пластины

$$u_{\mathrm{tt}} = -k\Delta^2 u,$$

например, с краевыми условиями

$$u|_{\partial D} = 0, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0$$

может быть получено из принципа Гамильтона, если определить потенциальную энергию равенством

$$V = \frac{k}{2}\int_D (\Delta u)^2 \mathrm{dx}.$$

Вариант №2

Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{\mathrm{tt}} = c^2 \Delta u$$

в ограниченной области $D \subset R^n$ с краевым условием третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = \sigma(x)u + g(x).$$

Докажите, что это уравнение имеет интеграл

$$E = \frac{1}{2}\int_D u_t^2 \mathrm{dx} + \frac{c^2}{2}\int_D (\nabla u)^2 \mathrm{dx} - \frac{c^2}{2}\int_{\partial D} \sigma u^2 \mathrm{dS} - c^2 \int_{\partial D} \mathrm{gudS}.$$

Вариант №3

Докажите, что всякая функция, определенная на пространстве R^3, непрерывно дифференцируемая и затухающая на бесконечности, удовлетворяет неравенству Лерэ

$$\int_{R^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|^2} \mathrm{dx} \leq 4 \int_{R^3} |\nabla u|^2 \mathrm{dy},$$

если интеграл в правой части сходится; $x \in R^3$ - произвольная точка.

Вариант №4

Докажите, что преобразование Лежандра переводит выпуклые функции в выпуклые. Более того, справедливо равенство $g_{\mathrm{uu}}(u,y) = f_{\mathrm{xx}}(x,y)$ в обозначениях

$$d(\mathrm{xu} - f) = \mathrm{xdu} - \mathrm{vdy}, \quad g(u,y) = \mathrm{xu} - f.$$

Рейтинговая контрольная точка № 3

Вариант №1

Вычислите интеграл

$$\int_{R^n} (\mathrm{Bx}, x)^2 e^{-(\mathrm{Ax},x)} \mathrm{dx},$$

где A - положительно определенный оператор.

Вариант №2

Докажите, что для потенциальности гладкого поля *G(x)* в H необходимо и достаточно, чтобы для любого x производная $G'(x)$ была симметричным оператором, т. е. выполнялось равенство

$$(G'(x)\xi, \eta) = (\xi, G'(x)\eta), \xi, \eta \in H.$$

Вариант №3

Докажите, что для любого линейного оператора $B: R^n \to R^n$ справедлива формула

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}|_{t=0} \det(I + \mathrm{tB}) = \mathrm{sp}B.$$

Вариант №4

Докажите равенство

$$\int_{R^n} (\mathrm{Bx}, x)(\mathrm{Cx}, x) e^{-(\mathrm{Ax},x)} \mathrm{dx} = \det A[\mathrm{sp}(A^{-1}B)\mathrm{sp}(A^{-1}C) - \mathrm{sp}(A^{-1}\mathrm{BA}^{-1}C)].$$

Критерии формирования оценок по контрольным работам:

7 баллов - ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочетов; обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, решено 100% задач;

6 баллов – ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов. Обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, допуская незначительные неточности при решении задач, решено 70% задач;

5 баллов – ставится за работу, если студент правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой. Обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, решено 55% задач

менее *4 баллов* – ставится за работу, если число ошибок и недочетов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы. Обучающийся дает неверную оценку ситуации, решено менее 50 % задач.

3.4. Оценочные материалы для компьютерного тестирования (контролируемая компетенция ОПК-1)

I:
S:Математическое моделирование это средство для
+: изучения свойств реальных объектов в рамках поставленной задачи
-: упрощения поставленной задачи
-: поиска физической модели
-: принятия решения в рамках поставленной задачи

I:
S: Какой модели быть не может?
-: вещественной, физической
+: идеальной, физической
-: вещественной, математической
-: идеальной, математической

I:
S: По поведению математических моделей во времени их разделяют на
-: детерминированные и стохастические
+: статические и динамические
-: непрерывные и дискретные
-: аналитические и имитационные

I:
S: Как называется замещаемый моделью объект?
-: копия
+: оригинал
-: шаблон
-: макет

I:

S: Что такое математическая модель?
-: точное представление реальных объектов, процессов или систем, выраженное в математических терминах и сохраняющее существенные черты оригинала
-: точное представление реальных объектов, процессов или систем, выраженное в физических терминах и сохраняющее существенные черты оригинала
+: приближенное представление реальных объектов, процессов или систем, выраженное в математических терминах и сохраняющее существенные черты оригинала

-: приближенное представление реальных объектов, процессов или систем, выраженное в физических терминах и сохраняющее существенные черты оригинала

I:
S: Какие виды математических моделей получаются при разделении их по принципам построения?
+: аналитические, имитационные

-: детерминированные, стохастические
-: стохастические, аналитические
-: детерминированные, имитационные

I:
S: На какой язык должна быть "переведена" прикладная задача для ее решения с использованием ЭВМ?
-: неформальный математический язык
+: формальный математический язык
-: формальный физический язык
-: неформальный физический язык

I:
S: Какая из задач не имеет аналитической модели?
-: поиск оптимального раскроя листа фанеры
-: демодуляция аналогового сигнала
-: расчет расхода топлива по заданной формуле
+: распознавание текста

I:
S: Какая математическая модель не относится к стохастическим?
-: идеальный газ
-: квантовый осциллятор
+: материальная точка
-: ни одна из предложенных

I:
S: Материальная точка это не только математическая, но и
-: натурная модель
-: физическая модель
+: наглядная модель
-: знаковая модель

I:
S: Во время поиска лучшего результата были построены две различные математические модели: эксперимент на ЭВМ, моделирующий систему атомов, и дифференциальная система уравнений, решенная численно, от двух полученных результатов взяли среднеквадратичный. Можно ли считать такой метод моделью?
-: да, это вещественная, математическая
+: да, это идеальная, математическая
-: да, это вещественная натурная
-: нет

I:

S: Какое максимальное количество моделей одного объекта можно составить?
+: любое количество
-: 1
-: 3
-: 7

I:
S: Сколько классов моделей существует?
-: 4
+: 2
-: 3
-: нет правильного ответа

I:
S: Какие модели относятся к классу вещественных моделей?
+: физические, натурные
-: идеальные, физические
-: наглядные, идеальные
-: натурные, идеальные

I:
S: Какие модели нельзя отнести к классу мысленных моделей?
-: физические
+: натурные
-: математические
-: наглядные

I:
S: Какие модели входят в состав идеальных математических моделей?
+: аналитические, функциональные, имитационные, комбинированные
-: аналоговые, структурные, геометрические, графические, цифровые и кибернетические
-: символы, алфавит, языки программирования, упорядоченная запись, топологическая запись, сетевое представление
-: нет правильного ответа

I:
S: В чем заключается построение математической модели?
-: в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно и качественно связь между теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста математическими величинами, и факторами, влияющими на конечный результат
-: в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно связь между теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста физическими величинами, и факторами, влияющими на конечный результат
-: в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно связь между теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста математическими величинами, и факторами, влияющими на конечный результат
+: в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно и качественно связь

между теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста физическими величинами, и факторами, влияющими на конечный результат

I:
S: В зависимости от характера исследуемых реальных процессов и систем, на какие группы могут быть разделены математические модели?
-: непрерывные, имитационные
+: детерминированные, стохастические
-: имитационные, детерминированные
-: стохастические, имитационные

I:
S: На какие группы можно разделить математические модели по виду входной информации?
-: статические, непрерывные
+: дискретные, непрерывные
-: динамические, непрерывные
-: динамические, статические

I:
S: На какие группы можно разделить математические модели по степени их соответствия реальным объектам, процессам или системам?
-: стохастические, изоморфные
+: изоморфные, гомоморфные
-: детерминированные, стохастические
-: нет правильного ответа

I:
S: Как называется модель, если между ней и реальным объектом, процессом или системой существует полное поэлементное соответствие?
-: стохастическая
+: изоморфная
-: детерминированная
-: гомоморфная

I:
S: Как называются модели, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий и их элементы (элементы модели) достаточно точно установлены?
-: статические
-: дискретные
+: детерминированные
-: динамические

I:
S: В каком моделировании функционирование объектов, процессов или систем описывается набором алгоритмов?
-: аппроксимационном
+: имитационном
-: аналитическом
-: нет правильного ответа

I:

S: Какие характеристики объекта, процесса или системы устанавливаются на этапе выбора математической модели?
-: дискретность, изоморфность
+: линейность, стационарность
-: изоморфность, линейность
-: стационарность, дискретность

I:
S: Посредством каких конструкций, математические модели описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи?
+: логико-математических конструкций
-: статистических конструкций
-: вероятностных конструкций
-: нет правильного ответа

I:
S: Что не входит в предмет математического моделирования?
-: построение алгоритма, моделирующего поведение объекта (системы)
-: корректировка построенной модели
-: поиск закономерностей поведения объекта (системы)
+: построение натурной модели

I:
S: Какие изучаются зависимости между величинами, описывающими процессы, при их моделировании?
-: качественные и количественные
-: только качественные
+: только количественные
-: нет правильного ответа

I:
S: В каких процессах вычислительный эксперимент является единственно возможным?
-: где натурный эксперимент может привести к очень большим объемам работ
-: где натурный эксперимент может привести к неверным результатам
+: где натурный эксперимент опасен для жизни и здоровья людей
-: нет правильного ответа

I:
S: С чего обычно начинается построение математической модели?
+: с построения и анализа простейшей, наиболее грубой математической модели рассматриваемого объекта, процесса или системы
-: с построения и анализа математической модели, которая наиболее полно соответствует рассматриваемому объекту, процессу или системе
-: с анализа математической модели рассматриваемого объекта
-: нет правильного ответа

I:
S: Какой характер носят выводы, полученные в результате исследования гипотетической модели?
-: абстрактный
+: условный
-: точный

-: нет правильного ответа

I:
S: При исследовании гипотетической модели какого характера получатся выводы?
-: абстрактного
+: условного
-: гипотетического
-: динамического

I:
S: Какими знаниями необходимо обладать для построения математической модели в прикладных задачах?
-: только специальными знаниями об объекте
-: только математическими знаниями
+: математическими знаниями и специальными знаниями об объекте
-: нет правильного ответа

I:
S: Какая задача не поддается точному решению на ЭВМ в виде формул?
-: интегральное уравнение 1-го порядка
-: дифференциально-интегральная система уравнений
-: система нелинейных уравнений
+: все указанные поддаются

I:
S: Какой из экспериментов наиболее выгодно применять для исследования большого числа вариантов проектируемого объекта или процесса для различных режимов его эксплуатации?
-: прогнозный
+: вычислительный
-: натурный
-: нет правильного ответа

I:
S: Какое преимущество имеет вычислительный эксперимент по сравнению с натурным экспериментом?
+: короткие сроки и минимальные материальные затраты
-: только короткие сроки получения результатов
-: только минимальные материальные затраты
-: нет правильного ответа

I:
S: Какими методами следует решать системы, состоящие из смешанных (линейных и нелинейных) уравнений?
-: точными
+: приближенными
-: оба предложенных метода годятся
-: никакими из предложенных

I:
S: Укажите существующие группы решения математических задач
+: численные, точные

-: приближенные, точные
-: численные, приближенные
-: алгоритмические, приближенные

I:
S: Какие процессы должны отражать математические модели в задачах проектирования или исследования поведения реальных объектов, процессов или систем?
+: реальные физические нелинейные процессы, протекающие в реальных объектах
-: реальные математические нелинейные процессы, протекающие в реальных объектах
-: реальные физические линейные процессы, протекающие в реальных объектах
-: реальные математические линейные процессы, протекающие в реальных объектах

I:
S: Для чего могут применяться результаты проверки адекватности математической модели и реального объекта, процесса или системы?
-: только для корректировки математической модели
-: только для решения вопроса о применимости построенной математической модели
+: для корректировки математической модели или для решения вопроса о применимости построенной математической модели
-: нет правильного ответа

I:
S: Следствием изотропности пространства является закон сохранения:
+: Энергии
-: Импульса
-: Массы
-: Заряда

I:
S: Метод познания, который основан на сознательном отвлечении от ряда свойств и отношений изучаемого явления с одновременным выделением интересующих исследователя свойств и связей
называется:
-: Синтез
+: Абстрагирование
-: Анализ
-: Формализация

Критерии формирования оценок по тестовым заданиям:

По итогам выполнения тестовых заданий оценка производится по пятибалльной шкале. При правильных ответах на:

89-100% заданий – «5» (баллов);
70-88% заданий – «4» баллов);
50-69% заданий – «3» (балла);
30-49% заданий – «2» (балла);
10-29% заданий – «1» (балл);
менее 10% заданий – «0» (баллов).

5.5. Оценочные материалы для промежуточной аттестации

Полный перечень вопросов, выносимых на зачет (контролируемая компетенция ОПК-1):

1. Динамические системы.
2. Автономные дифференциальные уравнения.

3. О глобальной разрешимости задачи Коши и единственности решения.
4. Динамические системы с дискретным временем.
5. Интегралы и законы сохранения.
6. Неавтономные дифференциальные уравнения.
7. Интегро-дифференциальные уравнения.
8. Декартово произведение динамических систем и разбиение системы на независимые подсистемы.
9. Производные и градиенты.
10. Принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа II рода.
11. Лагранжианы материальных частиц.
12. Законы сохранения в механике.
13. Принцип Гамильтона для систем со связями.
14. Принцип наименьшего действия Мопертюи (Мопертюи–Эйлера–Лагранжа–Якоби).
15. Применение принципа Гамильтона в механике сплошной среды.
16. Принцип Гамильтона и конечномерные аппроксимации бесконечномерных систем.
17. Динамика гибкой нерастяжимой нити.
18. Уравнение колебаний струны.
19. Специальная теория относительности Эйнштейна.
20. Каноническая гамильтонова форма уравнений механики.
21. Силы трения. Диссипация энергии.
22. О законах термодинамики.
23. Теоремы Пуанкаре о возвращении.
24. Гидродинамическая интерпретация систем дифференциальных уравнений и теорема Лиувилля.
25. Распределение Гиббса.
26. Статистическая механика идеального газа.
27. Метод Лапласа асимптотической оценки интегралов.
28. Градиентные системы.
29. Малые колебания механической системы около положения равновесия.
30. Статистическая механика твердого тела.

Методические рекомендации по подготовке и процедуре осуществления контроля выполнения

Подготовка к промежуточной аттестации заключается в изучении и тщательной проработке обучающимся учебного материала дисциплины с учетом рекомендованного преподавателем учебно-методического обеспечения. Для обеспечения полноты ответа на вопросы и лучшего запоминания рекомендуется составлять план ответа на каждый вопрос.

Критерии формирования оценок по промежуточной аттестации. Уровень знаний определяется оценками *«зачтено»*, *«не зачтено»*.

1. Студент показывает полные и глубокие знания программного материала, логично и аргументировано отвечает на поставленный вопрос, а также дополнительные вопросы, показывает высокий уровень теоретических знаний.

2. Студент показывает глубокие знания программного материала, грамотно его излагает, достаточно полно отвечает на поставленный вопрос и дополнительные вопросы, умело формулирует выводы. В тоже время при ответе допускает несущественные погрешности.

3. Студент показывает достаточные, но не глубокие знания программного материала; при ответе не допускает грубых ошибок или противоречий, однако в формулировании ответа отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами. Для получения правильного ответа требуется уточняющие вопросы.

4. Оценка *«зачтено»* (61-70 баллов) - уровень знаний студента соответствует требованиям, установленным в п. п. 1-3.

5. Оценка *«не зачтено»* (36-60 баллов) - студент показывает недостаточные знания программного материала, не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускается грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на поставленный вопрос или затрудняется с ответом.