Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ОПОП
_______ М.С. Нирова
«12» апреля 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ»
(код и наименование дисциплины)

Программа специалитета
01.05.01 Фундаментальные математика и механика
(код и наименование программы специалитета)

Направленность (профиль)
Фундаментальная математика
(наименование направленности (профиля))

Квалификация (степень) выпускника
специалист

Форма обучения
очная

Нальчик 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы, описание показателей, критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Карта компетенции

Шифр и название компетенций: *способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении (ОПК-2).*

Индикаторы достижения компетенции ОПК-2:

ОПК-2.1. Способен оценивать существующие принципы математических моделей.

ОПК-2.2. Способен выбирать необходимые методы исследования и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования.

Общая характеристика компетенции

Тип компетенции: общепрофессиональная компетенция выпускника образовательной программы по направлению специалитета 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, уровень ВО- специалитет.

1.1. Этапы формирования компетенций и средства оценивания

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины	Индикаторы достижения компетенции	Основные показатели оценки результатов обучения	Вид оценочного средства
ОПК-2- Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.	**ОПК-2.1.** Способен оценивать существующие принципы математических моделей. **ОПК-2.2.** Способен выбирать необходимые методы исследования и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования.	**Знать:** существующие принципы математических моделей стандартных задач в области профессиональной деятельности. **Уметь:** выбирать необходимые методы исследования, модифицирует существующие и разрабатывает новые методы, исходя из задач конкретного исследования **Владеть:** приемами применения полученных результатов, представления итогов проделанной работы	Оценочные материалы для практических занятий. Оценочные материалы для коллоквиума. Оценочные материалы для проведения тестирования. Оценочные материалы для промежуточной аттестации

1.2. Критерии формирования оценок на различных этапах их формирования

Текущий и рубежный контроль

Этап (уровень)	Первый этап (уровень)	Второй этап (уровень)	Третий этап (уровень)
Баллы	**36-50 баллов**	**51-60 баллов**	**61-70 баллов**
Характеристика	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Частичное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценку «удовлетворительно».	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «хорошо».	Полное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических занятий. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «отлично».

На первом (начальном) этапе формирования компетенции формируются знания, умения и навыки, составляющие базовую основу компетенции, без которой невозможно ее дальнейшее развитие. Обучающийся воспроизводит термины, факты, методы, понятия, принципы и правила; решает учебные задачи по образцу.

На втором (основном) этапе формирования компетенции приобретается опыт деятельности, когда отдельные компоненты компетенции начинают «работать» в комплексе и происходит выработка индивидуального алгоритма продуктивных действий, направленных на достижение поставленной цели.

На этом этапе обучающийся осваивает аналитические действия с предметными знаниями по конкретной дисциплине, способен самостоятельно решать учебные задачи, внося коррективы в алгоритм действий, осуществляя координирование хода работы, переносит знания и умения на новые условия.

Третий (завершающий) этап – это овладение компетенцией. Обучающийся способен использовать знания, умения, навыки при решении задач повышенной сложности и в нестандартных условиях. По результатам этого этапа обучающийся демонстрирует итоговый уровень сформированности компетенции.

Промежуточная аттестация (зачет)

Оценка	Незачтено	Зачтено
Баллы	**36-60**	**61-70**
Характеристика	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачёте не ответил ни на один вопрос.	Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете представил полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на оба

		вопроса. Студенту, имеющему 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, выставляется отметка «зачтено» без сдачи зачёта.

2. Методические материалы и типовые контрольные задания, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Перечень оценочных средств

№	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
1.	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2.	Задача (практическое задание)	Средство оценки умения применять полученные теоретические знания в практической ситуации. Задача (задание) должна быть направлена на оценивание тех компетенций, которые подлежат освоению в данной дисциплине, должна содержать четкую инструкцию по выполнению или алгоритм действий.	Комплект задач и заданий
3.	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам
4.	Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Фонд тестовых заданий

3. Перечень контрольных заданий и иных материалов, необходимых для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности

3.1. Вопросы по темам дисциплины «Теория случайных процессов» (контролируемая компетенция ОПК-2)

Тема 1. Случайные функции и их распределения

1. Предмет теории случайных процессов, некоторые задачи.
2. Случайные элементы и их распределения.
3. Цилиндрическая σ-алгебра B_T.

4. Случайная функция как семейство случайных элементов и как одно измеримое отображение.
5. Описание B_T для бесконечного T.
6. Согласованность меры.
7. Формулировка теоремы Колмогорова.
8. Построение семейства независимых случайных элементов с заданными распределениями.
9. Эмпирические меры, процессы частных сумм, процессы восстановления, модель страхования Крамера-Лундберга, пуассоновская случайная мера.
10. Эквивалентные случайные функции.

Тема 2. Согласованные меры. Процесс с независимыми приращениями

1. Совпадение борелевской и цилиндрической σ-алгебр в конечном произведении польских пространств.
2. Регулярность мер в метрических пространствах.
3. Аппроксимация меры борелевского множества мерами вложенных компактов.
4. Цилиндрическая алгебра C_T.
5. Доказательство теоремы Колмогорова.
6. Конечномерные распределения случайной функции.
7. Условия согласованности мер $Q_{t_1,\dots,t_n}$ для упорядоченных наборов точек $t_1,\dots,t_n \in T$.
8. Характеристическая функция меры на $\left(R^n, B(R^n)\right)$.
9. Условия согласованности мер на евклидовых пространствах в терминах характеристических функций.
10. Критерий существования процесса с независимыми приращениями.
11. Пуассоновский процесс.
12. Броуновское движение (винеровский процесс).

Тема 3. Гауссовские процессы

1. Многомерное нормальное распределение.
2. Построение действительной гауссовской случайной функции по функции среднего и ковариационной функции.
3. Комплекснозначные гауссовские процессы.
4. Неотрицательно-определенные функции как ковариационные функции.
5. Броуновское движение (винеровский процесс).
6. Эквивалентность двух определений броуновского движения.
7. Функции Хаара и Шаудера.
8. Флуктуации последовательности стандартных гауссовских величин.
9. Построение непрерывного винеровского процесса на [0, 1], а затем на $[0, \infty)$.
10. Многомерное броуновское движение.

Тема 4. Свойства траектории броуновского движения

1. Недифференцируемость п.н. траекторий винеровского процесса ни в одной точке $[0, \infty)$.
2. Марковское свойство винеровского процесса.
3. Марковские моменты, σ-алгебра F_τ.
4. Строго марковское свойство винеровского процесса.
5. Принцип отражения. Закон нуля или единицы.
6. Распределения, связанные с максимумом винеровского процесса на $[0, t]$.
7. Закон повторного логарифма.
8. Локальный закон повторного логарифма.
9. Броуновский мост.

Тема 5. Мартингалы

1. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры.
2. Разложение Дуба.
3. Компенсаторы.
4. Дискретный вариант формулы Танака.
5. Пополнение фильтрации.
6. Квадратическая характеристика.
7. Квадратическая вариация.
8. Теорема Дуба о свободном выборе.
9. Максимальное и минимальное неравенство Дуба для субмартингалов.
10. Лемма о числе пересечений полосы.
11. Теорема о сходимости субмартингалов.
12. Ветвящийся процесс Гальтона - Ватсона.
13. Сходимость мартингалов в $L^1(\Omega, F, P)$.
14. Теорема Леви. Следствия для субмартингалов и мартингалов с непрерывным временем.

Тема 6. Слабая сходимость случайных элементов

1. Слабая сходимость мер в метрических пространствах.
2. Сходимость с.э. по распределению.
3. Критерий слабой сходимости.
4. Сохранение слабой сходимости под действием непрерывных отображений.
5. Слабая сходимость мер в $C(T, \chi)$.
6. Относительная слабая компактность и плотность семейства мер.
7. Формулировка теоремы Прохорова.
8. Принцип инвариантности Донскера-Прохорова.
9. Многомерная ЦПТ Линдеберга (формулировка), лемма о максимуме сумм независимых случайных величин.
10. Схема доказательства критерия согласия Колмогорова.
11. Броуновский мост как условный винеровский процесс.

Тема 7. Марковские процессы

1. Эквивалентные определения марковского процесса.
2. Лемма об аппроксимации $\sigma\{X_t, t \in U\}|B(R)$-измеримых функций.
3. Марковость процессов с независимыми приращениями со значениями в R^d.
4. Марковость d мерного броуновского движения и пуассоновского процесса.
5. Переходная функция марковского процесса.
6. Нахождение переходной функции d-мерного броуновского движения.
7. Однородные процессы.
8. Конечномерные распределения марковского процесса, их выражение через начальное распределение и переходную функцию.

Тема 8. Цепи Маркова

1. Построение марковской цепи по начальному распределению и переходным вероятностям.
2. Эквивалентное определение пуассоновского процесса как цепи Маркова.
3. Явная конструкция пуассоновского процесса по последовательности независимых экспоненциальных величин.
4. Эргодическая теорема для цепей Маркова. Следствия.
5. Инвариантная мера.

Тема 9. Системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Формулы Эрланга.

1. Условие стандартности марковской цепи.
2. Инфинитезимальная матрица Q стохастической полугруппы $P(t), t \geq 0$.
3. Обратная и прямая системы дифференциальных уравнений Колмогорова.
4. Стационарное распределение как собственный вектор матрица Q^T.
5. Формулы Эрланга. Модель системы массовогообслуживания, приводящая к этим формулам.
6. Коэффициент загрузки и вероятность потери требования в стационарном режиме.

Тема 10. Интеграл по ортогональной случайной мере

1. Понятие о канонических представлениях случайных функций.
2. Ортогональные случайные меры и их σ-конечные структурные меры.
3. Интеграл по ортогональной случайной мере, его свойства.
4. Построение ортогональной случайной меры, отвечающей данной структурной мере.
5. Теорема Карунена о факторизации ковариационной функции и представлении процесса в виде интеграла по ортогональной случайной мере.

Тема 11. Спектральное представление стационарных процессов

1. Стационарные в широком смысле процессы и их ковариационные функции.
2. Теорема Герглотца.
3. Непрерывность процессов в среднем квадратическом.
4. Теорема Бохнера-Хинчина.
5. Спектральное представление стационарных процессов с непрерывным и дискретным временем.
6. Эргодичность в $L^2(\Omega)$.
7. Процессы скользящего среднего.
8. Статистическое оценивание ковариационной функции и спектральной плотности.
9. Периодограмма и ее усреднение.
10. Задача линейного прогноза.
11. Регулярные и сингулярные процессы.
12. Разложение Вольда.
13. Регулярные процессы, как физически осуществимые фильтры.
14. Критерий Колмогорова регулярности процесса.

Тема 12. Интеграл Ито

1. Некоторые подходы к построению стохастического интеграла.
2. Предсказуемые множества.
3. Построение ортогональной случайной меры Z на полукольце предсказуемых множеств, ее продолжение.
4. Интеграл Ито, как интеграл по введенной мере Z.
5. Вычисление интеграла Ито для простой функции.
6. Прогрессивно измеримые множества.
7. Конструкция интеграла Ито на основе прогрессивно измеримых функций.
8. Распространение интеграла на пространство L^2.
9. Свойства интеграла Ито с переменным верхним пределом.

Тема 13. Стохастические дифференциальные уравнения

1. Уравнение Ланжевена.
2. Аналог теоремы Фубини для интеграла Ито.
3. Винеровский процесс, как частный случай решения уравнения Ланжевена.
4. Процесс Орнштейна-Уленбека. Т

5. еорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения.
6. Марковость решения стохастического дифференциального уравнения.

Критерии формирования оценок (оценивания) устного опроса.

В результате устного опроса знания, обучающегося оцениваются по следующей шкале:

4 балла, ставится, если обучающийся:

1) полно излагает изученный материал, даёт правильное определенное экономических понятий;

2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;

3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

3 балла, ставится, если обучающийся даёт ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для балла «1», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1-2 недочёта в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

2-1 балл, ставится, если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий;

2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;

3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

0 баллов, ставится, если обучающийся обнаруживает незнание большей части соответствующего раздела изучаемого материала, допускает ошибки в формулировке.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

3.2. Практические задания для самостоятельной работы обучающегося (контролируемая компетенция ОПК-2)

Тема 1. Случайные функции и их распределения

1. Пусть $X = X(\omega, t)$ - функция, определенная на $\Omega \times T$ и принимающая значения в R. Пусть, кроме того, E - множество всех функций $f: T \to R$. Рассмотрим на этом множестве σ-алгебру $E = \sigma(\{f: f(t) \in B\}, B \in B(R), t \in T)$, которая называется цилиндрической σ-алгеброй. Докажите, что $(X_t = X(\cdot, t), t \in T)$— случайный процесс тогда. и только тогда, когда $X - (F|E)$-измеримая функция.

2. Процессы $(X_t, t \in T)$ и $(Y_t, t \in \mathcal{T})$ называются независимыми, если независимы порожденные ими σ-алгебры. Докажите, что $(X_t, t \in T)$ и $(Y_t, t \in \mathcal{T})$ - независимы тогда и только тогда, когда для любых натуральных n, m и для любых $t_1,..., t_n \in T$, $\tau_1,..., \tau_m \in \mathcal{T}$ векторы $\left(X_{t_1},..., X_{t_n}\right)$ и $\left(Y_{\tau_1},..., Y_{\tau_m}\right)$ являются независимыми.

3. Нарисуйте траекторию процесса Y_t в модели страхования Спарре-Андерсена.

4. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ - процесс восстановления, Докажите, что $P\left(\lim_{t \to +\infty} X_t = +\infty\right) = 1$.

5. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ - процесс восстановления, построенный по независимым, но не обязательно одинаково распределенным случайным величинам $(\xi_n, n \in N)$.

а) Приведите пример подобного процесса, уходящего на бесконечность за конечное время с положительной вероятностью.

б) Приведите пример подобного процесса, не уходящего на бесконечность даже за бесконечное время.

6. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ - процесс восстановления, построенный по случайным величинам $\{\xi_n, n \in N\}$. Обозначим $\mu = E\xi_i, \sigma^2 = D\xi_i$, причем известно, что $\mu, \sigma^2 \in (0, +\infty)$. Докажите, что имеет место сходимость по распределению при $t \to +\infty$:

$$\frac{X_t - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

7. Пусть $(\xi_n, n \in N)$ — случайный процесс, элементы которого $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются независимыми случайными величинами. Обозначим $\chi = {}_{n=1}^{\infty} F_n^{\infty}$, где $F_n^{\infty} = \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$, остаточную σ-алгебру, те. пересечение всех σ-алгебр, порожденных наборами $(\xi_k, k \geq n + 1)$. Докажите закон нуля или единицы: для любого события $A \in \chi$ выполнено $P(A) = 0$ или $P(A) = 1$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Случайные функции и их распределения». Основная цель сформировать навыки решения задач по данной теме.

Тема 2. Согласованные меры. Процесс с независимыми приращениями

1. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ - процесс восстановления, построенный по $\{\xi_n, n \in N\}$. Верно ли, что процесс X_t всегда имеет независимые приращения?

2. Пусть $N^1 = (N_t^1, t \geq 0), \ldots, N^k = \left(N_t^k, t \geq 0\right)$ - независимые пуассоновские процессы (те. независимыми являются порожденные ими σ-алгебры), причем N^i имеет интенсивность λ_i. Докажите, что процесс $N_t = \sum_{i=1}^{k} N_t^i$ также является пуассоновским, и найдите его интенсивность.

3. Задан процесс где $\left\{Y_t = \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j, t \geq 0\right\}$, где $(\xi_n, n \in N)$ - независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие также от пуассоновского процесса $N = (N_t, t \geq 0)$ интенсивности λ. Докажите, что процесс Y_t имеет независимые приращения.

4. Пусть $(\xi_n, n \in N)$ независимые экспоненциальные случайные величины с параметром λ, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$,а $N = (N_t, t \geq 0)$ - процесс восстановления, построенный по ним (пуасооновский процесс интенсивности λ). Для каждого $t > 0$ обозначим $V_t = S_{N_t+1} - t$ (“перескок”) и $U_t = t - S_{N_t}$ (“недоскок”).

а) Вычислите вероятность $P(V_t > v, U_t > u)$.

б) Докажите, что V_t и U_t - независимы и что $V_t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

в) Вычислите функцию распределения U_t и EU_t.

5. Пусть $N = (N_t, t \geq 0)$ пуассоновский процесс интенсивности λ. Найдите математическое ожидание числа таких его скачков на отрезке $[0, T]$, что

а) в их правой a-окрестности нег других скачков (эта окрестность может выходить и за пределы отрезка),

б) в их левой a-окрестности нет других скачков.

6. Пусть $(N_t, t \geq 0)$- пуассоновский процесс интенсивности λ. Найдите предел пн. N_t/t при $t \to +\infty$.

7. Докажите, что у пуассоновского процесса $(N_t, t \geq 0)$ интенсивности $\lambda > 0$ не существует непрерывной модификации, т.е. не существует такого процесса $(X_t, t \geq 0)$, что для каждого $t \geq 0$ с вероятностью 1 $X_t = N_t$и все траектории X_tнепрерывны.

Замечание. Процесс $(Y_t, t \in T)$ *называется модификацией процесса* $(X_t, t \in T)$, *если для любого* $t \in T$ *выполнено* $P(X_t = Y_t) = 1$.

8. Пусть $X = (X_t, t \geq 0)$ - такой случайный процесс, для которого $P(X_s \leq X_t) = 1$при $0 \leq s \leq t < \infty$. Предположим, что X непрерывен по вероятности справа в каждой точке s полупрямой $[0, \infty)$,т.е. X_t сходится по вероятности к X_s, когда $t \to s + 0$. Докажите, что у Xсуществует модификация, имеющая п.н. неубывающие траектории, непрерывные справа.

Указание: сначала надо установить утверждение из анализа. Пусть $f(x)$ *- такая функция на* $[0,1]$, *что она не убывает по рациональным точкам. Докажите, что тогда* *функция $\tilde{f}(x)$, определенная как $\tilde{f}(x) = \lim_{r\to x+0, r\in Q} f(r)$ является непрерывной справа и неубывающей.*

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Согласованные меры. Процесс с независимыми приращениями». Основная цель сформировать навыки решения задач по данной теме.

Тема 3. Гауссовские процессы

1. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ винеровский процесс, Докажите, что следующие процессы тоже винеровские:

а) $X_t = -W_t$;

б) $X_t = \sqrt{c}W_{t/c}, c > 0$.

2. Пусть $(Y_t, t \in [0,1])$ - гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $r(s,t) = \min(s,t) - \mathrm{st}$. Докажите, что такой пронес существует и что процесс $\left(X_t = (t+1)Y_{t/(t+1)}, t \geq 0\right)$ является винеровским.

3. Пусть $W_t^1,\ldots,W_t^d$ - независимые винеровские процессы. Докажите, что с вероятностью 1 процесс $W_t = \left(W_t^1,\ldots,W_t^d\right)$ (многомерный винеровский процесс) выйдет из шара произвольного фиксированного радиуса r с центром в нуле пространства.

4. Докажите, что существует гауссовский процесс $X = \left(X_t, t \in R_+^d\right)$ с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией

$$R(s,t) = \prod_{k=1}^{d} \min(s_k, t_k),$$

где $s = (s_1,\ldots,s_d) \in R_+^d, t = (t_1,\ldots,t_d) \in R_+^d$.

5. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс, Докажите, что с вероятностью 1 его траектория имеет неограниченную вариацию на произвольном отрезке $[a,b]$, т.е. что

$$\sup_T \sum_{i=1}^{n} \left|W_{t_i+1} - W_{t_i}\right| = +\infty \text{ п.н.},$$

где $T = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ - разбиение отрезка $[a,b]$.

6. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс. Для каждого $n \in N$ рассмотрим разбиения отрезка $[a,b]$ точками $a = t_{n;0} < t_{n;1} < \ldots < t_{n;N(n)} = b$, где $N(n) \in N$ и $\Delta T(n) := \max_{k=0;\ldots,N(n)} (t_{n;k+1} - t_{n;k}) \to 0$

при $n \to +\infty$. Положим $U_n := \sum_{k=0}^{N(n)-1} \left(W_{t_{n;k+1}} - W_{t_{n;k}}\right)^2$. Найдите предел в среднем квадратическом величин U_n, когда $n \to +\infty$.

7. Пусть последовательность положительных чисел $\{t_n, n \in N\}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1/2} < \infty$. Докажите, что тогда $\left|W_{t_{i_n}}\right| \to +\infty$ п.н. с ростом n. Здесь $(W_t, t \geq 0)$ виноровский процесс.

8. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ - гауссовский процесс со стационарными: независимыми приращениями (стационарные приращения означают, что распределение $X_t - X_s$ зависит только от $t - s$). Докажите, что найдутся такие константы $a, b \in R$, что процесс $Y_t = (X_t - \mathrm{at})/b$ является винеровским.

9. Пусть $\{\xi_n, n \in Z_+\}$ - независимые $N(0,1)$ случайные величины. Докажите, что процесс

$$X_t = \frac{\xi_0 t}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\mathrm{kt})}{k} \xi_k$$

является винеровским на отрезке $[0,\pi]$ (ряд понимается как предел частичных сумм в L^2).

Указание: над разложить функцию $I_{[0,t]}(x)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе на $[0,\pi]$, составленной из $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(\mathrm{kx})$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Гауссовские процессы». Основная цель сформировать навыки решения задач по данной теме.

Тема 4. Свойства траектории броуновского движения

1. Найдите $\mathrm{E}B_n(t)$ и $\operatorname{cov}(B_n(s), B_n(t))$ для $s,t \in [0,1]$ и $n \ge 0$. Докажите, что $B(t)$ - гауссовский процесс с $\mathrm{E}B(t) = 0$ и $\operatorname{cov}(B(s), B(t)) = \min\{s,t\}$ для $s,t \in [0,1]$.

2. Пусть $\{t_n\}_{n\ge1}$- последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1/2} < \infty$. Докажите, что тогда $|W(t_n)| \to \infty$ п.н. при $n \to \infty$.

3. Рассмотрим последовательность $\prod_n, n \in N$, измельчающихся разбиений $\left(t_m^{(n)}\right)$ отрезка $[0,t]$ точками специального вида $t_m^{(n)} = \mathrm{tm}2^{-n}, m = 0,\dots,2^n$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{2^n-1}\left(W\left(t_{m+1}^{(n)}\right) - W\left(t_m^{(n)}\right)\right)^2 \to t \text{ п.н. при } n \to \infty. \ (1)$$

4. Покажите, что утверждение (1) о сходимости п.н. не обязано выполняться, если брать измельчающиеся произвольные разбиения $\prod_n, n \in N$, отрезка [0, 1] точками $t_m^{(n)}, m = 0,\dots,N_n$ $(n \in N)$, для которых

$$\max_{0\le m\le N_n}\left(t_{m+1}^{(n)} - t_m^{(n)}\right) \to 0 \text{при } n \to \infty$$

(но тем не менее будет иметь место сходимость по вероятности).

5. Докажите, что почти все траектории винеровского процесса являются гёльдеровскими функциями с показателем $\gamma < 1/2$, т. е. на каждом временном отрезке $[a,b] \subset [0,\infty)$

$$|W(t) - W(s)| \le C_\gamma |t-s|\gamma,\ s,t \in [a,b], C_\gamma = \text{const} > 0.$$

Можно ли в приведенном результате взять константу C_γ не зависящей от промежутка $[a,b]$?

6. Докажите, что с вероятностью единица

$$\lim_{t\to+0}\sup W(t)/t^{1/2} = \infty$$

(тем самым условие Гёльдера порядка 1/2 не выполняется в точке 0).

7. Пусть $X = \{X(t), t \in T\}, T \subset R$ - действительный случайный процесс и F_T - его естественная фильтрация. Пусть $\tau = \tau(\omega)$- марковский момент относительно этой фильтрации; если $\tau(\omega) = \infty$, полагаем $X(\tau(\omega),\omega) = 0$. Можно ли утверждать, что $X(\tau(\omega),\omega)$ является $F_\tau|B(R)$ - измеримой величиной? Что можно сказать в случае T = N?

8. Положим $\tau_a = \inf\{t > 0 : W(t) = a\}$, где $W = \{W(t), t \ge 0\}$ - винеровский процесс, $a \in R$. Докажите, что $\tau_a \overset{D}{=} a^2\tau_1$, т.е. распределения величин τ_a и $a^2\tau_1$ совпадают: $\mathrm{Law}(\tau_a) = \mathrm{Law}(a^2\tau_1)$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Свойства траектории броуновского движения». Основная цель сформировать навыки решения задач по данной теме.

Тема 5. Мартингалы.

1. Пусть $(W_t, t \ge 0)$ - винеровский процесс. Докажите, что процесс $Y_t = W_t^2 - t$ является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

2. Пусть $(W_t, t \ge 0)$ - винеровский процесс. Найдите вое такие пары $(\alpha,\beta) \in R^2$, что процесс

$$(X_t = \exp\{\alpha W_t + \beta t\}, t \ge 0)$$

является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом) относительно естественной фильтрации процесса W_t.

3. Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n,\dots$ - такая последовательность случайных величин, что для любого n существует плотность $f_n(x_1,\dots,x_n)$ случайного вектора $(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Пусть $\eta_1,\dots,\eta_n,\dots$ - другая

последовательность случайных величин, причем также для n любого существует плотность $g_n(x_1,...,x_n)$ случайного вектора $(\eta_1,...,\eta_n)$. Докажите, что процесс

$$X_n = \frac{g_n(\xi_1,...,\xi_n)}{f_n(\xi_1,...,\xi_n)}$$

является мартингалом относительно фильтрации $(F_n = \sigma(\xi_1,...,\xi_n), n \in N)$.

4. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс, а τ - момент остановки относительно его естественной фильтрации. Докажите, что процесс

$$\left(X_t = W_{\min(t,\tau)}, t \geq 0\right)$$

является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

Указание: надо аппроксимировать τ марковскими моментами с конечным числом значений.

5. Пусть $(X_n, n \in Z_+)$ - ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с законом размножения частиц Pois(3). Найдите разложение Дуба-Мейера для данного процесса.

6. Докажите, что если τ марковский момент относительно $F = (F_t, t \geq 0)$, то τ является и опциональным моментом относительно F.

7. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс, а $\tau = \min\{t: |W_t| = 1\}$. Вычислите $E\tau$.

8. Пусть $(S_n, n \in N)$ - простейшее случайное блуждание с вероятностью шага вправо p. Пусть $a < x < b$ - целые числа, а $X_n = x + S_n, n \geq 1$. Обозначим $\tau = \min\{n: S_n \in \{a, b\}\}$ - момент выхода процесса X_n из полосы. Вычислите $E\tau$.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнений заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Мартингалы». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 6. Слабая сходимость случайных элементов

1. Докажите, что меры δ_{x_n}, заданные на борелевской σ-алгебре метрического пространства (S, ρ), имеют слабый предел тогда и только тогда, когда существует такой элемент $x \in S$, что $x_n \xrightarrow{\rho} x$ при $n \to \infty$ (тогда $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ при $n \to \infty$).

2. Покажите, что класс множеств, определяющий (слабую) сходимость, является классом, определяющим меру. Объясните, почему обратное утверждение не обязано выполняться.

3. Докажите, что в польском пространстве R^∞, снабженном метрикой вида

$$\rho\big((x_1, x_2,..), (y_1, y_2,..)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

борелевская σ-алгебра совпадает с цилиндрической, а сходимость $Q_n \Rightarrow Q$ при $n \to \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда слабо сходятся все конечномерные распределения. Иначе говоря, класс цилиндров в R^∞одновременно является классом, определяющим и меру, и сходимость.

4. Покажите, что C порождает $B(S)$. Докажите, что если $Q_n \Rightarrow Q$ в $J(S)$, то $\phi_{Q_n} \to \phi_Q$ поточечно. Обратно, пусть $\phi_{Q_n} \to \phi$ поточечно, где $\phi: S \to C$ и семейство $\{Q_n, n \geq 1\}$ плотно. Тогда $\phi = \phi_Q$для некоторого $Q \in J(S)$ и $Q_n \Rightarrow Q$.

5. Докажите, что для любого целого неотрицательного числа j

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} S_k \geq j\right) = 2P(S_n > j) + P(S_n = j),$$

где $S_0 = 0, S_k = X_1 + ... + X_k, k \geq 1$, а $X_1, X_2,...$ - введенные выше величины.

6. Пусть $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, где $\xi, \xi_n, n \geq 1$, действительные случайные величины, причем функция $F_\xi(x)$ непрерывна на R. Тогда

$$\sup_{x \in R} \left|F_{\xi_n}(x) - F_\xi(x)\right| \to 0, n \to \infty..$$

Докажите, что двузначных величин $X_i, i \in N$, и их сумм $S_k = X_1 + ... + X_k, k \geq 1$, имеем

$$\max_j P(S_n = j) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

7. Докажите, что $X^{(n)} \xrightarrow{D} X$ во введенном выше пространстве *C(T, S)* тогда и только тогда, когда $X^{(n)}_{|K} \xrightarrow{D} X_{|K}$ в *C(K, S)* для любого компакта $K \subset T$; здесь, как и прежде, $Y_{|K}$ означает сужение функции $Y = \{Y_t, t \in T\}$ до функции $Y_{|K} = \{Y_t, t \in K\}$.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнений заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Слабая сходимость случайных элементов». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 7. Марковские процессы

1. Пусть $(X_t, t \in T)$ марковский процесс, $T \subset R_+$. Пусть для любого $t \in T$ задана борелевская функция h_t. Рассматривается случайный процесс $Y_t = (h_t(X_t), t \in T)$. Докажите, что если h_t - биекция для любого $t \in T$ (считаем, что в этом случае h_t^{-1} - тоже борелевская), то Y_t - тоже марковский процесс. Приведите пример марковского процесса X_t и борелевских функций h_t, при которых процесс Y_t не является марковским.

2. Пусть $(X_t, t \in T)$, $(Y_t, t \in T)$ независимые марковские процессы. Верно ли, что процесс $(X_t + Y_t, t \in T)$ тоже марковский?

3. Верно ли, что общее число частиц $Y = (Y_n = X_0 + \dots + X_n, n \in Z_+)$ ветвящегося процесса, Гальтона-Ватсона $X = (X_n, n \in Z_+)$ является марковским процессом а) относительно естественной фильтрации процесса, б) относительно естественной фильтрации процесса Y?

4. Пусть $(W_t, t \geq 0)$- винеровский процесс. Является ли марковским процесс $X_t = W_t^2$?

5. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс, а $\tau_x = \min\{t: W_t = x\}$ для $x \geq 0$. Докажите, что процесс $\tau = (\tau_x, x \geq 0)$ является марковским.

6. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс, Вычислите его переходную плотность.

7. Пусть $(X_t, n \geq 0)$ - независимые случайные величины с равномерным распределением на множестве $\{$-1,0,1$\}$. Рассмотрим процесс

$$Y_n = X_0X_1 + X_1X_2 + \dots + X_{n-1}X_n,$$

Докажите, что X_n является мартингалом относительно фильтрации

$$F = (\sigma(X_1,\dots,X_n), n \in Z_+),$$

но не является марковским процессом относительно нее.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнений заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Марковские процессы». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 8. Цепи Маркова

1. Докажите, что процесс $(X_n, n \in Z_+)$ со значениями в не более чем счетном множестве χ является марковской цепью тогда и только тогда, когда. для любого $n \in Z_+$ и любых $a_{n+1},\dots, a_0 \in \chi$ выполнено

$$P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n,\dots, X_0 = a_0) = P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n)$$

всегда, когда вероятности условий положительны.

2. Пусть $\{\xi_n, n \in N\}$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $p(x)$, положительной при всех $x \in R$. Укажите, являются ли следующие случайные последовательности цепями Маркова:

а) $\xi = (\xi_n, n \in N)$;

б) $S = (S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, n \in Z_+)$, где $S_0 = 0$.

Для тех, которые окажутся цепями Маркова, укажите переходные вероятности за один шаг.

3. Пусть $\{\xi_n, n \in Z_+\}$ - марковская цепь с фазовым пространством $S = \{1,2,3\}$, начальным состоянием $\xi_0 = 1$ п. н. и матрицей переходных вероятностей:

$$\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix}.$$

Положим $\eta_n = I\{\xi_n = 1\} + 2I\{\xi_n \neq 1\}$. Докажите, что η_n тоже марковская цепь, и найдите ее матрицу переходов.

4. Марковская цепь $\{\xi_n, n \in Z_+\}$ имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности $P(\xi_{n+1} = k+1 | \xi_n = k) = p$, $P(\xi_{n+1} = k | \xi_n = k) = 1 - p$, $k, n \in N, p \in [0,1]$. Найдите распределение ξ_n. Докажите, что последовательность $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \min\{n: \xi_n = k\}$ также является цепью Маркова и найдите се переходные вероятности.

5. Цепь Маркова ξ_n имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности

$P(\xi_{n+1} = k+1 | \xi_n = k) = a^{-k}$, $P(\xi_{n+1} = k | \xi_n = k) = 1 - a^{-k}$,

где $k, n \in Z_+, a > 1$. Найдите $\mathrm{Ea}^{\xi_n}, \mathrm{Da}^{\xi_n}$.

6. Приведите пример такой однородной марковской цепи с дискретным временем, что

а) унес есть несколько стационарных распределений, но нет предельного;

б) у нее нет стационарного распределения, но есть пределы переходных вероятностей при $n \to \infty$.

Докажите, что если однородная марковская цепь с дискретным временем имеет несколько стационарных распределений, то их, на самом деле, бесконечно много.

7. Пусть $(\xi_n, n \in Z_+)$ - независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями $\{0,1,2,3\}$ и следующим распределением:

$$P(\xi_n = 0) = 1/7, P(\xi_n = 1) = 2/7, P(\xi_n = 2) = 3/7, P(\xi_n = 3) = 1/7.$$

Рассматриваются процессы $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n (\mathrm{mod} 4), n \in N$ (остаток от деления суммы на 4) и $Y_n = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n (\mathrm{mod} 4)$. Докажите, что $(X_n, n \in N)$ и $(Y_n, n \in N)$ являются однородными марковскими цепями, и найдите их предельные распределения.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнений заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Цепи Маркова». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 9. Системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Формулы Эрланга.

1. Докажите, что пуассоновский процесс интенсивности λ является однородной марковской цепью. Найдите его переходные вероятности, инфинитезимальную матрицу и стационарное распределение.

2. Всякий ли процесс восстановления является марковской цепью?

3. Пусть $n \times n$ матрица $Q = (q_{\mathrm{ij}})_{i,j=1}^{n}$ такова, что q_{ij} при $i \neq j$ и $\sum_{j=1}^{n} q_{\mathrm{ij}} = 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что тогда матрицы $P(t) = \exp\{\mathrm{tQ}\}$ образуют стохастическую полугруппу.

4. Докажите, что переходные вероятности $p_{\mathrm{ij}}(t)$стандартной стохастической полугруппы равномерно непрерывны на R_+.

5. Система “массового обслуживания” состоит из прибора и ‘ремонтного устройства. Прибор работает случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром λ. Ремонт прибора занимает случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ. Обозначим $p_1(t) = P$ (прибор работает в момент времени t), $p_2(t) = P$ (прибор ремонтируется в момент времени t).

Найдите $p_i(t), i \in \{1,2\}$, при условий $p_1(0) = p_2(0) = 1/2$, предполагая, что процесс образует марковскую цепь.

7. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - независимые неотрицательные одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Является ли процесс $Y = (Y(x), x \geq 0)$, где

$$Y(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I\{X_j \le x\}$$

- это эмпирическая функция распределения, марковской цепью? Если да, то найдите се переходные вероятности и проверьте на, однородность.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнений заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Формулы Эрланга». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 10. Интеграл по ортогональной случайной мере

1. Пусть $\xi = (\xi_t, t \in [0,1])$ - случайный процесс такой, что все $\xi_t, t \in T$, независимы в совокупности, одинаково распределены и нетривиальны (отличны от констант). Является ли процесс ξ стохастически непрерывным хоть в одной точке $[0,1]$?

2. Приведите пример процесса $(X_t, t \in [0,1])$, который является стохастически непрерывным на $[0,1]$, но не интегрируемым по вероятности на $[0,1]$ (интеграл по вероятности определяется как сходимость римановских интегральных сумм по вероятности).

Замечание. Данный пример показывает, что сходимость по вероятности достаточно плоха, ведь из непрерывности не следует интегрируемость, в отличие от сходимости в L^2.

3. Является ли пуассоновский процесс $(N_t, t \ge 0)$ дифференцируемым а) по вероятности, б) в среднем квадратичном?

4. Пусть $(W_t, t \ge 0)$ винеровский процесс. Найдите распределение случайной величины $X_t = \int_0^t W_s \mathrm{ds}$. Докажите, что процесс является гауссовским.

5. Найдите для каждого $t \ge 0$ совместное распределение величин W_t и X_t из предыдущей задачи.

6. Задан случайный процесс, $X_t = \int_0^t e^{-W_s} \mathrm{ds}$,где W_s винеровский процесс, Найдите функцию среднего и ковариационную функцию процесса.

7. Пусть $(W_t, t \ge 0)$ винеровский процесс. Вычислите для $t > 0$ предел в L^2 при $n \to \infty$ у выражения

$$\sum_{i=1}^{n} W_{t(i-1)/n}\left(W_{\mathrm{ti}/n} - W_{t(i-1)/n}\right).$$

Методические рекомендации по решению задач

При выполнений заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Интеграл по ортогональной случайной мере». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 11. Спектральное представление стационарных процессов

1. Пусть Λ - множество, A -алгебра его подмножества, а μ - мера на A. Пусть отображение $Z: A \to L^2(\Omega, F, P)$ удовлетворяет равенству

$\mathrm{EZ}(B)\overline{Z(C)} = \mu(B \cap C)$ для любых $B, C \in A$.

Докажите, что Z есть ортогональная мера на A.

2. Путь $\lambda_1,..., \lambda_k$ - числа из отрезка $[-\pi; \pi]$,а $\Phi_1,..., \Phi_k$ - центрированные попарно некоррелированные случайные величины. Докажите, что процесс $(X_n, n \in Z)$, где

$$X_n = \sum_{j=1}^{k} e^{i\lambda_j n}\Phi_j,$$

является стационарным в широком смысле, и найдите его спектральное представление.

3. Пусть $\{X_n, n \in Z\}$ - стационарная в широком смысле последовательность со средним a и ковариационной функцией $R(n)$. Докажите, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{L^2} a$$

тогда, и только тогда, когда, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R(k) \to 0$.

4. Пусть центрированный стационарный в широком смысле процесс $(X_n, n \in Z)$ удовлетворяет равенству $X_0 = X_N$ п.н. для некоторого $N \in N$. Докажите, что тогда, для всех $n \in Z$ X_n имеет вид

$$X_n = \sum_{k=-[N/2]}^{[(N-1)/2]} e^{i\frac{2\pi k}{N}n} \Phi_k,$$

где Φ_k — центрированные попарно некоррелированные случайные величины из L^2.

5. Пусть $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ - многочлен, а $P\left(\frac{d}{\mathrm{dt}}\right)$ - соответствующий оператор дифференцирования в L^2. Пусть $(\xi_t, t \in R)$ - стационарный в широком смысле процесс с известным спектральным представлением. Стационарный в широком смысле процесс $(X_t, t \in R)$ имеет спектральное представление и, кроме того, удовлетворяет уравнению

$$P\left(\frac{d}{\mathrm{dt}}\right) X_t = \xi_t.$$

Найдите спектральное представление для X_t. При каких условиях на многочлен P решение уравнения единственно?

6. Стационарный процесс $(X_t, t \in R)$ удовлетворяет равенству $\mathrm{dY}_t/\mathrm{dt} = X_t$, где стационарный процесс $(X_t, t \in R)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \lambda^2 I\{|\lambda| < 1\}$. Найдите $\mathrm{cov}(Y_1, Y_0)$.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнений заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Спектральное представление стационарных процессов». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 12. Интеграл Ито

1. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, и даны случайные величины $f_1 < \dots < f_n$; причем f_iявляется F_{t_i}- измеримой для всех $i = 1,\dots,n$. Докажите, что тогда, для ступенчатого процесса $f(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\omega) I\{t_{i-1} < t \le t_i\}$ процесс $J_t(f)$ является мартингалом с п.н. непрерывными траекториями.

2. Пусть τ момент остановки относительно естественной фильтрации винеровского процесса $(W_t, t \ge 0)$, причем $E\tau<+\infty$. Докажите, что

а) $\int_0^{+\infty} I\{t \le \tau\} \mathrm{dW}_t = W_\tau$, если τ принимает лишь конечное число значений;

б) $\int_0^{+\infty} I\{t \le \tau\} \mathrm{dW}_t = W_\tau$,если τ - произвольный.

3. Приводите пример стохастического дифференциального уравнения с нулевым начальным условием, решение которого не единственно.

4. Решите стохастические дифференциальные уравнения:

а) $\mathrm{dX}_t = X_t \mathrm{dW}_t, X_0 = 1$.

б) $\mathrm{dX}_t = \frac{1}{2} X_t \mathrm{dt} + 2X_t \mathrm{dW}_t, X_0 = 1$.

5. Докажите, что если V(0) не зависит от винеровского процесса $(W_t, t \ge 0)$ и $V(0) \sim N(0, \sigma^2/(2a))$, то решение $V = (V_t, t \ge 0)$ уравнения Ланжевена $\mathrm{dV}_t = -\mathrm{aV}_t \mathrm{dt} + \sigma \mathrm{dW}_t$, является гауссовским процессом с ковариационной функцией $\frac{\sigma^2}{2a} e^{-a|s-t|}$.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнений заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Интеграл Ито». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 13. Стохастические дифференциальные уравнения

1. Приведите пример адаптированного, но не прогрессивно измеримого процесса.

2. Докажите, что равносильным образом опциональная σ-алгебра O может быть определена как σ-алгебра подмножеств в $R_+ \times \Omega$, порожденная стохастическими интервалами вида

$[[0, \tau[[:= \{(t, \omega): 0 \le t < \tau(\omega)\},$
где $\tau(\omega)$ - марковские моменты (относительно потока F).

3. Докажите что равносильным образом предсказуемая σ-алгебра J может быть определена как σ-алгебра, порожденная всеми согласованными процессами, траектории которых лишь непрерывны слева на $(0, \infty)$.

4. Пусть процесс X является прогрессивно измеримым и τ - конечный марковский момент. Покажите, что случайная величина X_τ будет F_τ-измеримой (это свойство является едва ли не определяющим целесообразность введения понятия прогрессивной измеримости).

5. Проверьте, что простые (кусочно-непрерывные справа) функции $f = f(t, \omega)$ вида

$$f(t, \omega) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k(\omega) 1_{[t_k, t_{k+1})}(t), t \in [0, T],$$

где величины $\xi_k(\omega) - F_{t_k}$-измеримы, $0 = t_0 < \dots < t_m = T$, являются опциональными.

6. Покажите, что простые (кусочно-непрерывные слева для $t \in (0, T]$функции $f = f(t, \omega)$ вида

$$f(t, \omega) = \eta(\omega) 1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \eta_k(\omega) 1_{(t_k, t_{k+1}]}(t), t \in [0, T],$$

где величина $\eta(\omega) - F_0$-измерима, $\eta_k(\omega) - F_{t_k}$ -измеримы, $0 = t_0 < \dots < t_m = T$, являются предсказуемыми.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнений заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Стохастические дифференциальные уравнения». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Критерии формирования оценок по заданиям для самостоятельной работы студента (типовые задачи):

«отлично» (4 балла) - обучающийся показал глубокие знания материала по поставленным вопросам, грамотно, логично его излагает, структурировал и детализировал информацию, избегая простого повторения информации из текста, информация представлена в переработанном виде. Свободно использует необходимые формулы при решении задач;

«хорошо» (3 балла) - обучающийся твердо знает материал, грамотно его излагает, не допускает существенных неточностей в процессе решения задач;

«удовлетворительно» (2 балла) - обучающийся имеет знания основного материала по поставленным вопросам, но не усвоил его деталей, допускает отдельные неточности при решении задач;

«неудовлетворительно» (менее 1 балла) – обучающийся допускает грубые ошибки в ответе на поставленные вопросы и при решении задач.

3.3. Оценочные материалы для контрольной работы (контролируемые компетенции ОПК-2).

Рейтинговая контрольная точка № 1

Вариант №1

1. Случайная функция как семейство случайных элементов и как одно измеримое отображение.

2. Пусть случайная величина Y - стандартная нормальная, а случайный процесс $X = \{X_t, t \ge 0\}$ задан равенством $X_t = t / \{t < |Y|\}$. Проверить, непрерывен ли X по вероятности. Найти конечномерные распределения 1 и 2 порядка.

Вариант №2

1. Совпадение борелевской и цилиндрической σ-алгебр в конечном произведении польских пространств.

2. Найти ковариационную функцию случайного процессаexp$\{W_t\}$, где W_t - винеровский процесс.

Вариант №3

1. Условия согласованности мер $Q_{t_1,\dots,t_n}$ для упорядоченных наборов точек $t_1,\dots,t_n \in T$.

2. Частица находится в одной из вершин единичного куба в трехмерном пространстве. В каждую единицу времени она выбирает одну из вершин, соседних с той, где она находится (каждую из таких - с одинаковой вероятностью), и переходит в нее. Сколько в среднем времени пройдет, прежде чем частица в первый раз придет в вершину, противоположную стартовой?

Вариант №4

1. Критерий существования процесса с независимыми приращениями.

2. Пусть $N^1 = (N_t^1, t \geq 0),\dots, N^k = \left(N_t^k, t \geq 0\right)$ - независимые пуассоновские процессы (те. независимыми являются порожденные ими σ-алгебры), причем N^i имеет интенсивность λ_i. Докажите, что процесс $N_t = \sum_{i=1}^k N_t^i$ также является пуассоновским, и найдите его интенсивность.

Рейтинговая контрольная точка № 2

Вариант №1

1. Функции Хаара и Шаудера.

2. Найти $\operatorname{cov}(Y_0, Y_2)$, если $Y_t = \mathrm{d}X_t/\mathrm{dt}$, а процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ стационарен и имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \exp\{-\lambda^2/2\}$.

Вариант №2

1. Принцип отражения. Закон нуля или единицы.

2. Пусть $S_0 = 0, S_n = X_1 + \dots + X_n$, где случайные величины $(X_n, n \in N)$ независимы и принимают значения 1 и -1 с одинаковыми вероятностями. При каких вещественных α случайный процесс $M_n = \exp\{S_n - \alpha n\}$ является: а) мартингалом; б) субмартингалом?

Вариант №3

1. Закон повторного логарифма.

2. Пусть $\{W_t, t \geq 0\}$ - винеровский процесс. Найти $D \int_0^2 \exp\{2W_s\} \mathrm{dW}_s$.

Вариант №4

1. Эргодическая теорема для цепей Маркова. Следствия.

2. Пусть $\left\{W_t = \left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right), t \geq 0\right\}$ -2-мерный винеровский процесс. Найти стохастический дифференциал процесса $X_t = \ln\left(\left(W_t^{(1)}\right)^2 + \left(W_t^{(2)}\right)^2\right)$ (считать доказанным, что процесс никогда не попадает в начало координат).

Рейтинговая контрольная точка № 3

Вариант №1

1. Доказать, что винеровский процесс не дифференцируем в среднем квадратическом.

2. Формулы Эрланга. Модель системы массовогообслуживания, приводящая к этим формулам.

Вариант №2

1. Теорема Бохнера-Хинчина.

2. Процесс X_n (n - целое неотрицательное) описывает движение частицы, выходящей из точки 0. Если частица в момент n была в одной из точек множества $\{-1, 0,$

1, 2}, то она делает скачок вправо на единицу, скачок влево на единицу либо остается на месте с вероятностями соответственно 1/2, 1/6 и 1/3.

Достигнув точек −2 либо 3, она на следующем шаге обязательно переходит в точку −1 и 2 соответственно (происходит отражение от экрана). Все скачки друг от друга независимы.

Найти:

а) математическое ожидание числа возвращений в нуль, которые произошли до первого отражения;

б) предел вероятности $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$.

Вариант №3

1. Интеграл Ито, как интеграл по введенной мере Z.

2. Докажите, что если V(0) не зависит от винеровского процесса $(W_t, t \geq 0)$ и $V(0) \sim N(0, \sigma^2/(2a))$, то решение $V = (V_t, t \geq 0)$ уравнения Ланжевена $\mathrm{dV}_t = -\mathrm{aV}_t\mathrm{dt} + \sigma\mathrm{dW}_t$, является гауссовским процессом с ковариационной функцией $\frac{\sigma^2}{2a}e^{-a|s-t|}$.

Вариант №4

1. Процесс Орнштейна-Уленбека.

2. Докажите что равносильным образом предсказуемая σ-алгебра J может быть определена как σ-алгебра, порожденная всеми согласованными процессами, траектории которых лишь непрерывны слева на $(0, \infty)$.

Критерии формирования оценок по контрольным работам:

7 баллов - ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочетов; обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, решено 100% задач;

6 баллов – ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов. Обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, допуская незначительные неточности при решении задач, решено 70% задач;

5 баллов – ставится за работу, если студент правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой. Обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, решено 55% задач

менее *4 баллов* – ставится за работу, если число ошибок и недочетов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы. Обучающийся дает неверную оценку ситуации, решено менее 50 % задач.

3.4. Оценочные материалы для компьютерного тестирования (контролируемые компетенции ОПК-2)

1. Если случайный процесс является стационарным в широком смысле, то

- он является также стационарным в узком смысле
- он является также гауссовским
- он является также винеровским
- его дисперсия равна константе

2. Какие из приведенных ниже функций $R(\tau)$ не могут быть корреляционными функциями некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса?

- $R(\tau) = 0{,}8^{-|\tau|}$
- $R(\tau) = e^{-|\tau|}$
- $R(\tau) = 0{,}8^{|\tau|}$

- $R(\tau) = \sin(\tau)/\tau$

3. Спектральная плотность мощности стационарного в широком смысле случайного процесса является
   - вещественной функцией
   - неотрицательной функцией
   - неотрицательно определенной функцией
   - четной функцией
   - нечетной функцией

4. Для исчерпывающего описания процесса с независимыми значениями достаточно задать
   - его одномерную функцию распределения
   - его математическое ожидание и дисперсию
   - его корреляционную функцию
   - его спектральную плотность мощности

5. Для исчерпывающего описания процесса с независимыми приращениями достаточно задать
   - его одномерную функцию распределения
   - его математическое ожидание и дисперсию
   - его корреляционную функцию
   - его спектральную плотность мощности

6 . Винеровский процесс является о гауссовским
   - стационарным в узком смысле
   - стационарным в широком смысле
   - процессом с нулевым математическим ожиданием
   - процессом с независимыми приращениями
   - процессом с возрастающей дисперсией

7. Однородный дискретный марковский процесс с непрерывным временем исчерпывающе характеризуется
   - матрицей переходных интенсивностей
   - матрицей переходных вероятностей
   - корреляционной функцией
   - одномерной функцией распределения
   - спектральной плотностью мощности

8 . Разложение Карунена-Лоэва - это
   - разложение случайной функции в ряд Фурье
   - разложение случайной функции по полиномам Чебышева
   - разложение случайной функции произвольному ортогональному базису
   - разложение случайной функции по собственным функциям корреляционной функции

9. Двое играют в «орлянку» до полного банкротства одного из игроков. Чему равна средняя продолжительность игры, если начальные капиталы игроков равны, соответственно, 10 (у бросающего первым игрока) и 100 (у бросающего вторым игрока) ставкам?
   - 1000
   - 1100

- 1110
- 1111
- другой ответ

10. Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника стреляющим первым дуэлянтом при каждом выстреле равна 1/4, вторым - 1/2. Дуэль продолжается до первого попадания. Найти среднюю продолжительность дуэли.

- 1,6
- 2,0
- 2,2
- 2,8
- другой ответ

11. Одномерное броуновское движение частицы описывается о процессом с независимыми значениями

- пуассоновским процессом
- стационарным в широком смысле процессом
- стационарным в узком смысле процессом
- винеровским процессом

12. Простейший поток событий обладает следующими свойствами:

- интервал времени между событиями распределен по показательному закону
- число событий на заданном интервале времени распределено по закону Пуассона
- количества событий на непересекающихся интервалах времени являются независимыми
- промежуток времени до наступления очередного события распределен по нормальному закону
- вероятность появления более одного события на интервале есть величина высшего порядка малости по сравнению с длиной интервала

13. Любой гауссовский процесс всегда является также

- стационарным в широком смысле
- стационарным в узком смысле
- процессом с независимыми значениями
- процессом с независимыми приращениями

14. Какие из приведенных соотношений не выполняются для спектральной плотности мощности 5" (<т>) стационарного в широком смысле случайного процесса?

- $S(\omega) = S(-\omega)$
- $S(\omega) = |S(\omega)|$
- $S(\omega) \geq 0$
- $S(\omega) = \mathrm{Re}[S(\omega)]$

15. Уравнения Юла-Уокера

- устанавливают связь между коэффициентами уравнения авторегрессии и корреляционной функцией случайного процесса
- устанавливают связь между коэффициентами уравнения скользящего среднего и корреляционной функцией случайного процесса
- используются для проверки стационарности случайного процесса
- служат для моделирования случайного процесса
- используются для ортогонального разложения случайного процесса

16. Математическое ожидание пуассоновского процесса

- равно константе
- равно нулю
- возрастает линейно
- возрастает нелинейно
- убывает линейно
- убывает нелинейно

17. Если случайный процесс является стационарным в узком смысле, то

- он является также стационарным в широком смысле
- он является также гауссовским
- он является также пуассоновским
- его математическое ожидание равно константе

18. Какие из приведенных функций $R(\tau)$ могут быть корреляционными функциями некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса

- $R(\tau) = \{1 - |\tau|, |\tau| < 1|$
- $R(\tau) = \{|\tau|, |\tau| < 1|$
- $R(\tau) = 0{,}8^{|\tau|}$
- $R(\tau) = \frac{\sin^2\tau}{\tau^2}$

19. Корреляционная функции $R(t,s)$ произвольного действительного случайного процесса обладает следующими свойствами:

- $R(t,s) = R(s,t)$
- $R^2(t,s) \leq R(s,s)R(t,t)$
- $R(t,s) \leq \max(R(s,s), R(t,t))$
- $R(t,s)$- неотрицательно определенная функция
- $R(t,s) \geq 0$

20. Для исчерпывающего описания ***произвольного*** случайного процесса достаточно задать

- одномерную функцию распределения случайного процесса
- двумерную функцию распределения случайного процесса
- его математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию
- его спектральную плотность мощности

21. Вероятность поглощения в задаче полубесконечного случайного блуждания на прямой с поглощающим экраном

- всегда равна единице
- никогда не равна единице
- всегда равна нулю
- никогда не равна нулю

22. Однородная цепь Маркова с дискретным временем исчерпывающе характеризуется

- матрицей переходных интенсивностей
- матрицей переходных вероятностей
- корреляционной функцией
- одномерной функцией распределения
- спектральной плотностью мощности

23. Стационарный в широком смысле «белый шум» обладает следующими свойствами:

- гауссовское распределение сечений
- некоррелированность сечений
- математическое ожидание равно константе
- дисперсия равна константе
- спектральная плотность мощности равна константе

24. Двое играют в «орлянку» до полного банкротства одного из игроков. Чему равна вероятность выигрыша первого игрока, если начальные капиталы игроков равны, соответственно, 1 0 (у бросающего первым игрока) и 1 0 0 (у бросающего вторым игрока) ставкам?

- 1/10
- 1/11
- 11/100
- 10/111
- 11/111
- другой ответ

25. Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника стреляющим первым дуэлянтом при каждом выстреле равна 1/4, вторым - 1/2. Дуэль продолжается до первого попадания. Найти вероятность «выигрыша» первого дуэлянта.

- 0,3
- 0,4
- 0,5
- 0,6
- другой ответ

26. Количество занятых телефонных линий на АТС наиболее адекватно описывается

- процессом с независимыми значениями
- процессом с независимыми приращениями
- цепью Маркова с дискретным временем
- цепью Маркова с непрерывным временем
- винеровским процессом

27. В простейшем потоке событий по закону Пуассона распределено

- интервал времени между соседними событиями
- максимальный интервал времени между событиями на заданном временном промежутке
- миниимальный интервал времени между событиями на заданном временном промежутке
- промежуток времени до наступления очередного события

28. Какие из приведенных ниже характеристик случайного процесса относится к марковскому процессу?

- процесс без памяти
- вероятностное развитие процесса в будущем полностью определяется настоящим моментом времени и не зависит от прошлого
- одномерное гауссовское распределение вероятности

29. Какие из приведенных ниже соотношений выполняются для двумерной $F(t, s.x, y)$ и одномерной с функций распределения произвольного случайного процесса?

- $F(t, s, x, y) = F(s, t, y, x)$
- $F(t, s, +\infty, +\infty) = 1$
- $F(t - u, s - u, .x, y) = F(s, t, y, x)$ для любых u
- $F(t, s, -\infty, +\infty) = 0$

30. Модель авторегрессии случайного процесса

- используются для проверки стационарности случайного процесса
- используются для описания процессов с независимыми значениями
- служит для моделирования дискретной цепи Маркова
- служит для моделирования стационарного в широком смысле случайногопроцесса
- используется для ортогонального разложения случайного процесса

31. Дисперсия пуассоновского процесса

- равна константе
- возрастает линейно
- возрастает нелинейно
- убывает линейно
- убывает нелинейно

32. Любой гауссовский случайный процесс

- является стационарным в узком смысле
- является стационарным в широком смысле
- полностью определяется функцией математического ожидания и корреляционной функцией
- имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию
- является процессом с независимыми значениями
- является процессом с независимыми приращениями

33. Какие из приведенных функций $S(\omega)$ могут быть спектральной плотностью мощности некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса?

- $S(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$
- $S(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^2}$
- $S(\omega) = \exp(-\omega^2)$
- $S(\omega) = \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$

34. Какие из указанных соотношений являются свойствами корреляционной функции $R(\tau)$ стационарного в широком смысле действительного случайного процесса?

- $R(\tau) = R(-\tau)$
- $R(\tau) \leq R(0)$
- $R(\tau) = D$, где D - дисперсия случайного процесса
- $R(\tau)$ - неотрицательно определенная функция
- $R(\tau) \geq 0$

35. Предельные вероятности состояний конечной однородной цепи Маркова с дискретным временем рассчитываются на основе

- матрицы переходных вероятностей
- матрицы переходных интенсивностей
- корреляционной матрицы
- двумерной функции распределения

36. Если случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным в широком смысле, то процесс $\eta(t) = \xi(t) - \xi(t - T)$будет

- стационарным в узком смысле
- стационарным в широком смысле
- гауссовским
- винеровским
- процессом с независимыми приращениями

37. Вероятность поглощения в задаче однородного случайного блуждания на прямой с двумя поглощающими экранами

- всегда равна единице
- никогда не равна единице
- всегда равна нулю
- никогда не равна нулю

38. Система дифференциальных уравнений Колмогорова позволяет рассчитать

- предельные вероятности состояний цепи Маркова с дискретным временем
- матрицу переходных вероятностей для цепи Маркова с дискретным временем
- матрицу переходных интенсивностей для цепи Маркова с непрерывным временем
- корреляционную функцию марковского процесса
- переходные вероятности для цепи Маркова с непрерывным временем

39. Одномерная функция распределения случайного процесса позволяет полностью описать

- процесс с независимыми приращениями
- процесс с независимыми значениями
- пуассоновский процесс
- марковский процесс
- гауссовский процесс

40. Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то случайный процесс $\xi(t) = X\sin(\omega t)$, где ω - детерминированная величина, является

- винеровским
- стационарным в широком смысле
- стационарным в узком смысле
- процессом с независимыми значениями

41. Если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ - независимые стационарные в широком смысле случайные процессы, то процесс $\zeta(t) = \xi(t) - \eta(t)$является

- стационарным в широком смысле
- стационарным в узком смысле
- процессом с независимыми приращениями
- процессом с независимыми значениями

42. Укажите свойства, характеризующие разложение Карунена-Лоэва.

- минимизация среднеквадратичной погрешности аппроксимации случайного процесса при заданном количестве компонентов разложения
- минимизация количества компонентов разложения при заданной среднеквадратичной погрешности аппроксимации случайного процесса
- разложение применимо как для стационарных, так и для нестационарных случайных процессов
- гауссовское распределение коэффициентов разложения

- ортогональность базисных функций

43. Укажите тип случайного процесса, наиболее адекватно описывающий количество людей, стоящих в очереди.
- процесс с независимыми значениями
- процесс с независимыми приращениями
- цепь Маркова с дискретным временем
- цепь Маркова с непрерывным временем
- гауссовский процесс

44. Распределение числа событий на интервале времени в простейшем потоке событий описывается
- распределением Пуассона
- формулой Эрланга
- показательным распределением
- гауссовским распределением
- равномерным распределением

45. Дисперсия случайного процесса характеризует
- амплитуду колебаний процесса относительно нуля
- амплитуду колебаний процесса относительно среднего значения
- степень коррелированности сечений случайного процесса и
- степень «гладкости» реализаций случайного процесса

46. Двумерная функция распределения случайного процесса позволяет
- рассчитать корреляционную функцию
- рассчитать математическое ожидание
- определить, является ли процесс стационарным в узком смысле
- определить, является ли процесс стационарным в широком смысле
- исчерпывающе описать процесс с независимыми приращениями

47. Корреляционная функция разности двух независимых стационарных в широком смысле случайных процессов с нулевыми математическими ожиданиями равна
- разности корреляционных функций исходных случайных процессов
- сумме корреляционных функций исходных случайных процессов
- произведению корреляционных функций исходных случайных процессов
- свертке корреляционных функций исходных случайных процессов

48. Вероятность разорения при игре в "орлянку" с бесконечно богатым соперником
- равна единице
- меньше единицы
- равна нулю
- меньше единицы, но больше нуля
- не определена

49. Предельные вероятности состояний конечной однородной цепи Маркова с непрерывным временем рассчитываются на основе
- матрицы переходных вероятностей
- матрицы переходных интенсивностей
- корреляционной матрицы
- двумерной функции распределения

50. Если случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным в узком смысле, то процесс $\eta(t) = \xi(t) - \xi(t-T)$ будет

- o стационарным в узком смысле
- o стационарным в широком смысле
- o гауссовским
- o винеровским
- o процессом с независимыми приращениями.

51. Математическое ожидание числа бросаний монеты при игре в «орлянку» с бесконечно богатым соперником равно

- o 1
- o 2
- o 3
- o $+\infty$
- o не определено

52. Корреляционная функция случайного процесса характеризует

- o амплитуду колебаний процесса относительно нуля
- o амплитуду колебаний процесса относительно среднего значения
- o изменение среднего значения случайного процесса
- o степень «гладкости» реализаций случайного процесса
- o ничего из указанного

53. Если случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией, то случайный процесс $\xi(t) = X\cos(\omega t) + Y\sin(\omega t)$, где ω- детерминированная величина,

- o является гауссовским
- o является стационарным в узком смысле
- o является винеровским
- o имеет нулевое математическое ожидание
- o имеет единичную дисперсию

54. Если $\xi(t)$ и $\eta(t)$- независимые стационарные в широком смысле случайные процессы, то процесс $\zeta(t) = \xi(t)\eta(t)$ является

- o процессом с независимыми приращениями
- o процессом с независимыми значениями
- o стационарным в широком смысле
- o стационарным в узком смысле

55. Укажите свойства матрицы переходных вероятностей (МПВ).

- o МПВ исчерпывающе характеризует однородную цепь Маркова с дискретным временем
- o Сумма элементов в каждом столбце МПВ равна единице
- o Сумма элементов в каждой строке МПВ равна единице
- o Все элементы МПВ являютя неотрицательными числами
- o Любая степень МПВ обладает всеми свойствами исходной МПВ

56. Укажите тип случайного процесса, наиболее адекватно описывающий азартные игры в казино.

- o Процесс с независимыми значениями
- o Процесс с независимыми приращениями
- o Цепь Маркова с дискретным временем

- Цепь Маркова с непрерывным временем
- Гауссовский процесс

57. Какаие из приведенных функций R(t, s) не могут быть корреляционными функциями некоторого случайного процесса?

- $R(t,s) = \frac{\sin(t-s)}{t-s}$
- $R(t,s) = \min(t,s)$
- $R(t,s) = \exp\left[\frac{\sin(t-s)}{t-s}\right]$
- $R(t,s) = \frac{\sin^2(t-s)}{(t-s)^2}$
- $R(t,s) = |t-s|$
- $R(t,s) = \max(t,s)$

58. Укажите свойства, характеризующие пуассоновский процесс.

- Пуассоновский процесс является частным случаем цепи Маркова с непрерывным временем
- Пуассоновский процесс является нестационарным случайным процессом с линейно возрастающим математическим ожиданием
- Моменты времени изменения состояний пуассоновского процесса определяются простейшим потоком событий
- Интенсивность потока событий изменения состояний пуассоновского процесса возрастает во времени
- Корреляционная функция пуассоновского процесса пропорциональна $\min(t,s)$

59. Математическое ожидание случайного процесса характеризует

- амплитуду колебаний процесса относительно нуля
- амплитуду колебаний процесса относительно среднего значения
- степень коррелированности сечений случайного процесса
- степень «гладкости» реализаций случайного процесса
- среднее течение процесса во времени

60. Укажите свойства, характерные для однородной цепи Маркова с дискретным временем.

- Переходные вероятности не зависят от абсолютного значения времени
- Всегда существуют предельные вероятности стационарного состояния
- Вероятности переходов за любое число шагов равны вероятностям перехода за один шаг
- Матрица переходных вероятностей за любое число шагов определяется степенью матрицы переходных вероятностей за один шаг
- Переходные вероятности удовлетворяют уравнению КолмогороваЧепмена

61. Модель скользящего среднего случайного процесса

- используются для проверки стационарности случайного процесса
- используются для описания процессов с независимыми значениями
- служит для моделирования дискретной цепи Маркова
- служит для моделирования стационарного в широком смысле случайного процесса
- используется для ортогонального разложения случайного процесса

62. Дисперсия винеровского процесса

- равна константе
- возрастает линейно
- возрастает нелинейно

- убывает линейно
- убывает нелинейно

63. Математическое ожидание винеровского процесса
- равно константе
- возрастает линейно
- возрастает нелинейно
- убывает линейно
- убывает нелинейно

64. Одномерная функция распределения F(t, 0) произвольного случайного процесса обладает следующими свойствами:
- $F(t,x) \leq 1$
- $F(t,x) \geq 0$
- $F(t,+\infty) = 1$
- $F(t,-\infty) = 0$
- $F(t,x)$неубывающая по t
- $F(t,x)$- неубывающая по x

65. В систему с двумя линиями обслуживания поступают заявки с интенсивностью 1/T. Среднее время выполнения одной заявки равно T. Сравнить предельные вероятности: P (все линии свободны) и Q (все линии заняты).
- P > Q
- P = Q
- P < Q

66. Какие из приведенных ниже соотношений выполняются для спектральной плотности мощности стационарной в широком смысле вещественной случайной последовательности $[\xi(n)]$?
- $\Phi_\xi\left(e^{i\omega}\right) = \Phi_\xi\left(e^{-i\omega}\right)$
- $\Phi_\xi\left(e^{i\omega}\right) = \mathrm{Re}\left[\Phi_\xi\left(e^{-i\omega}\right)\right]$
- $\Phi_\xi\left(e^{i\omega}\right) = \left|\Phi_\xi\left(e^{-i\omega}\right)\right|$
- $\Phi_\xi\left(e^{i\omega}\right) = \Phi_\xi\left(e^{-i(\omega-2\pi)}\right)$

Критерии формирования оценок по тестовым заданиям:

По итогам выполнения тестовых заданий оценка производится по пятибалльной шкале. При правильных ответах на:

89-100% заданий – «5» (баллов);
70-88% заданий – «4» баллов);
50-69% заданий – «3» (балла);
30-49% заданий – «2» (балла);
10-29% заданий – «1» (балл);
менее 10% заданий – «0» (баллов).

3.5. Оценочные материалы для промежуточной аттестации

Полный перечень вопросов, выносимых на зачет
(контролируемая компетенция ОПК-2):

1. Случайный элемент со значениями в измеримом пространстве, определение и примеры.
2. Пространство (R^T , B^T).
3. Эквивалентность двух определений случайного процесса.
4. Конечномерные распределения, условия симметрии и согласованности.

5. Конечномерные распределения однозначно определяют меру на B^T.
6. Теорема Колмогорова о существовании процесса с заданным семейством конечномерных распределений.
7. Классы случайных процессов (с независимыми значениями, процессы восстановления, с независимыми приращениями, стационарные в узком и широком смысле, гауссовские, марковские, мартингалы).
8. Теорема о существовании гауссовского процесса с заданными средним и ковариационной функцией.
9. Виды непрерывности случайных процессов и их связь.
10. Эквивалентность случайных процессов.
11. Необходимые и достаточные условия существования эквивалентного процесса с непрерывными траекториями.
12. Теорема Колмогорова о существовании эквивалентного процесса с непрерывными траекториями.
13. Условия существования эквивалентного гауссовского процесса с непрерывными траекториями.
14. Два определения винеровского процесса и их эквивалентность.
15. Конструкция винеровского процесса на [0,1].
16. Задание винеровского процесса на полупрямой.
17. Определение пуассоновского процесса, пуассоновский процесс как процесс восстановления.
18. Сепарабельность случайного процесса.
19. Измеримость случайного процесса, существование измеримой модификации.
20. Интегрируемость траекторий процесса.
21. Недифференцируемость траекторий винеровского процесса.
22. Условное математическое ожидание и его свойства.
23. Мартингал, субмартингал, супермартингал (определения и результат применения выпуклой функции).
24. Лемме Дуба-Мейера.
25. Мартингальные неравенства.
26. Лемма Дуба о числе пересечений.
27. Теорема об отсутствии разрывов второго рода у субмартингалов.
28. Марковское свойство винеровского процесса.
29. Строго марковское свойство винеровского процесса.
30. Неравенство Леви.
31. Принцип отражения.
32. Закон повторного логарифма для винеровского процесса.
33. Локальный закон повторного логарифма.
34. Неограниченность вариации винеровских траекторий.
35. Интеграл Ито для ступенчатых функций и его свойства.
36. Интеграл Ито для функций из М2.
37. Формула Ито замены переменных.
38. Стохастический дифференциал.
39. Теорема существования сильного решения стохастического дифференциального уравнения.
40. Теорема единственности.
41. Корреляционная функция и ее свойства.
42. Необходимое и достаточное условие существования предела в среднем квадратичном.
43. Непрерывность процесса в среднем квадратичном.
44. Дифференцируемость процесса в среднем квадратичном.
45. Интегрируемость процесса в среднем квадратичном.

46. Связь дифференцируемости процесса в среднем квадратичном и дифференцируемости траекторий.
47. Ортогональные случайные меры, структурные меры.
48. Соответствие между ортогональными случайными мерами и процессами с ортогональными приращениями.
49. Стохастический интеграл (от неслучайной функции) и его свойства.
50. Пример стационарного гауссовского марковского процесса.
51. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса (на основе теорем функционального анализа).
52. Теорема Бохнера-Хинчина.
53. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса.
54. Линейные преобразования неслучайных функций.
55. Допустимый фильтр.
56. Примеры фильтров.
57. Решение дифференциального уравнения как допустимый фильтр.
58. Сингулярные и регулярные процессы. 59. Разложение Вольда.
60. Прогноз стационарного процесса

Методические рекомендации по подготовке и процедуре осуществления контроля выполнения

Подготовка к промежуточной аттестации заключается в изучении и тщательной проработке обучающимся учебного материала дисциплины с учетом рекомендованного преподавателем учебно-методического обеспечения. Для обеспечения полноты ответа на вопросы и лучшего запоминания рекомендуется составлять план ответа на каждый вопрос.

Критерии формирования оценок по промежуточной аттестации. Уровень знаний определяется оценками *«зачтено», «не зачтено».*

1. Студент показывает полные и глубокие знания программного материала, логично и аргументировано отвечает на поставленный вопрос, а также дополнительные вопросы, показывает высокий уровень теоретических знаний.

2. Студент показывает глубокие знания программного материала, грамотно его излагает, достаточно полно отвечает на поставленный вопрос и дополнительные вопросы, умело формулирует выводы. В тоже время при ответе допускает несущественные погрешности.

3. Студент показывает достаточные, но не глубокие знания программного материала; при ответе не допускает грубых ошибок или противоречий, однако в формулировании ответа отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами. Для получения правильного ответа требуется уточняющие вопросы.

4. Оценка *«зачтено»* (61-70 баллов) - уровень знаний студента соответствует требованиям, установленным в п. п. 1-3.

5. Оценка *«не зачтено»* (36-60 баллов) - студент показывает недостаточные знания программного материала, не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускается грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на поставленный вопрос или затрудняется с ответом.