

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СОГЛАСОВАНО

Руководитель образовательной

программы М.С. Нирова

«12» апреля 2023 г.



УТВЕРЖДАЮ

Директор ИФ и М

Б.П. Кунжев

2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ»

(код и наименование дисциплины)

Программа специалитета

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

(код и наименование программы специалитета)

Направленность (профиль)

Фундаментальная математика

(наименование направленности (профиля))

Квалификация (степень) выпускника

специалист

Форма обучения

очная

Нальчик 2023

Рабочая программа дисциплины «Теория случайных процессов» /сост. О.И. Бжеумихова – Нальчик: КБГУ, 2023. – 44 с.

Рабочая программа предназначена для студентов очной формы обучения по программе специалитета 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, профиль «Фундаментальная математика» на 5 семестре, 3 курса.

Рабочая программа составлена с учетом Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика (уровень специалитета), утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 10.01.2018г. №16 (зарегистрировано в Минюсте РФ 6 февраля 2018г. № 49943).

Содержание

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля).....	3
2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО	3
3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля).....	3
4. Содержание и структура дисциплины (модуля)	4
4.1. Содержание дисциплины (модуля)	4
4.2. Структура дисциплины	8
4.3. Лекционные занятия	8
4.4. Практические занятия.....	10
4.5. Самостоятельное изучение разделов дисциплины	10
5. Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации.....	11
6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности.....	31
7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины	32
7.1. Нормативно-законодательные акты.....	32
7.2. Основная литература	32
7.3. Дополнительная литература	32
7.4. Периодические издания.....	32
7.5. Интернет-ресурсы	33
7.6. Методические указания по проведению различных учебных занятий, к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы.....	34
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....	39
Лист изменений (дополнений) в рабочей программе дисциплины	41
Приложение 1	42
Приложение 2	43

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)

Целями освоения дисциплины (модуля) "Теория случайных процессов" являются фундаментальная подготовка в области построения и анализа сложных стохастических моделей, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в разнообразных приложениях.

Задачи дисциплины:

- усвоение студентами основного теоретического материала курса;
- выработка прочного навыка по решению задач вычислительного и теоретического характера в области случайных процессов;
- приобретение студентами знаний, позволяющих применять их в различных научных отраслях.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Теория случайных процессов» относится к обязательной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» основной образовательной программы по направлению подготовки специалитета 01.05.01 Фундаментальная математика и механика, профиля «Фундаментальная математика».

Дисциплина «Теория случайных процессов» излагается на базе теории вероятностей и математической статистики, математического анализа, комплексного анализа, алгебры, дифференциальных уравнений, функционального анализа. Знание теории случайных процессов может существенно помочь при построении и анализе сложных стохастических моделей, возникающих в физике, химии, биологии, медицине, экономике, финансовой и актуарной областях, а также в технике. Кроме того, методы теории случайных процессов широко применяются в целом ряде направлений современной математики.

3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих общепрофессиональных компетенций (ОПК) в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки:

ОПК-2. - Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.

Индикаторы достижения компетенции ОПК:

ОПК-2.1. Способен оценивать существующие принципы математических моделей.

ОПК-2.2. Способен выбирать необходимые методы исследования и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать определения и свойства основных объектов изучения теории случайных процессов, а также формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательства, возможные сферы приложений.

Уметь решать задачи вычислительного и теоретического характера в области случайных процессов, устанавливать взаимосвязи между вводимыми понятиями, доказывать как излагавшиеся утверждения, так и родственные им новые.

Владеть разнообразным математическим аппаратом, подбирая сочетания различных методов, для описания и анализа сложных стохастических моделей.

4. Содержание и структура дисциплины (модуля)

4.1. Содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Наименование раздела/темы	Содержание раздела	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	2	3	4	5
1	<i>Случайные функции и их распределения</i>	Предмет теории случайных процессов, некоторые задачи. Случайные элементы и их распределения. Цилиндрическая σ -алгебра B_T . Случайная функция как семейство случайных элементов и как одно измеримое отображение. Описание B_T для бесконечного T . Согласованность меры. Формулировка теоремы Колмогорова. Построение семейства независимых случайных элементов с заданными распределениями. Эмпирические меры, процессы частных сумм, процессы восстановления, модель страхования Крамера-Лундберга, пуассоновская случайная мера. Эквивалентные случайные функции.	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т
2	<i>Согласованные меры. Процесс с независимыми приращениями</i>	Совпадение борелевской и цилиндрической σ -алгебр в конечном произведении польских пространств. Регулярность мер в метрических пространствах. Аппроксимация меры борелевского множества мерами вложенных компактов. Цилиндрическая алгебра C_T . Доказательство теоремы Колмогорова. Конечномерные распределения случайной функции. Условия согласованности мер Q_{t_1, \dots, t_n} для упорядоченных наборов точек $t_1, \dots, t_n \in T$. Характеристическая функция меры на $(R^n, B(R^n))$. Условия согласованности мер на евклидовых пространствах в терминах характеристических функций. Критерий существования процесса с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Броуновское движение (винеровский процесс).	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т
3	<i>Гауссовские процессы</i>	Многомерное нормальное распределение. Построение действительной гауссовской случайной функции по функции среднего и ковариационной функции.	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т

		<p>Комплекснозначные гауссовские процессы. Неотрицательно-определенные функции как ковариационные функции. Броуновское движение (винеровский процесс). Эквивалентность двух определений броуновского движения. Функции Хаара и Шаудера. Флуктуации последовательности стандартных гауссовских величин. Построение непрерывного винеровского процесса на $[0, 1]$, а затем на $[0, \infty)$. Многомерное броуновское движение.</p>		
4	<i>Свойства траектории броуновского движения</i>	<p>Недифференцируемость п.н. траекторий винеровского процесса ни в одной точке $[0, \infty)$. Марковское свойство винеровского процесса. Марковские моменты, σ-алгебра F_τ. Строго марковское свойство винеровского процесса. Принцип отражения. Закон нуля или единицы. Распределения, связанные с максимумом винеровского процесса на $[0, t]$. Закон повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма. Броуновский мост.</p>	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т
5	<i>Мартингалы</i>	<p>Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры. Разложение Дуба. Компенсаторы. Дискретный вариант формулы Танака. Пополнение фильтрации. Квадратическая характеристика. Квадратическая вариация. Теорема Дуба о свободном выборе. Максимальное и минимальное неравенство Дуба для субмартингалов. Лемма о числе пересечений полосы. Теорема о сходимости субмартингалов. Ветвящийся процесс Гальтона - Ватсона. Сходимость мартингалов в $L^1(\Omega, F, P)$. Теорема Леви. Следствия для субмартингалов и мартингалов с непрерывным временем.</p>	ОПК-2	
6	<i>Слабая сходимость случайных элементов</i>	<p>Слабая сходимость мер в метрических пространствах. Сходимость с.э. по распределению. Критерий слабой сходимости. Сохранение слабой сходимости под действием непрерывных отображений, Слабая сходимость мер в $C(T, \mathcal{X})$. Относительная слабая компактность и плотность семейства мер.</p>	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т

		<p>Формулировка теоремы Прохорова. Принцип инвариантности Донскера-Прохорова. Многомерная ЦПТ Линдеберга (формулировка), лемма о максимуме сумм независимых случайных величин. Схема доказательства критерия согласия Колмогорова. Броуновский мост как условный винеровский процесс.</p>		
7	<i>Марковские процессы</i>	<p>Эквивалентные определения марковского процесса. Лемма об аппроксимации $\sigma\{X_t, t \in U\} B(R)$ - измеримых функций. Марковость процессов с независимыми приращениями со значениями в R^d. Марковость d-мерного броуновского движения и пуассоновского процесса. Переходная функция марковского процесса. Нахождение переходной функции d-мерного броуновского движения. Однородные процессы. Конечномерные распределения марковского процесса, их выражение через начальное распределение и переходную функцию.</p>	ОПК-2	
8	<i>Цепи Маркова</i>	<p>Построение марковской цепи по начальному распределению и переходным вероятностям. Эквивалентное определение пуассоновского процесса как цепи Маркова. Явная конструкция пуассоновского процесса по последовательности независимых экспоненциальных величин. Эргодическая теорема для цепей Маркова. Следствия. Инвариантная мера.</p>	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т
9	<i>Системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Формулы Эрланга.</i>	<p>Условие стандартности марковской цепи. Инфинитезимальная матрица Q стохастической полугруппы $P(t), t \geq 0$. Обратная и прямая системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Стационарное распределение как собственный вектор матрица Q^T. Формулы Эрланга. Модель системы массового обслуживания, приводящая к этим формулам. Коэффициент загрузки и вероятность потери требования в стационарном режиме.</p>	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т
10	<i>Интеграл по ортогональной случайной мере</i>	<p>Понятие о канонических представлениях случайных функций. Ортогональные случайные меры и их</p>	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т

		<p>σ-конечные структурные меры. Интеграл по ортогональной случайной мере, его свойства. Построение ортогональной случайной меры, отвечающей данной структурной мере. Теорема Карунена о факторизации ковариационной функции и представлении процесса в виде интеграла по ортогональной случайной мере.</p>		
11	<i>Спектральное представление стационарных процессов</i>	<p>Стационарные в широком смысле процессы и их ковариационные функции. Теорема Герглотца. Непрерывность процессов в среднем квадратическом. Теорема Бохнера-Хинчина. Спектральное представление стационарных процессов с непрерывным и дискретным временем. Эргодичность в $L^2(\Omega)$. Процессы скользящего среднего. Статистическое оценивание ковариационной функции и спектральной плотности. Периодограмма и ее усреднение. Задача линейного прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Разложение Вольда. Регулярные процессы, как физически осуществимые фильтры. Критерий Колмогорова регулярности процесса.</p>	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т
12	<i>Интеграл Ито</i>	<p>Некоторые подходы к построению стохастического интеграла. Предсказуемые множества. Построение ортогональной случайной меры Z на полукольце предсказуемых множеств, ее продолжение. Интеграл Ито, как интеграл по введенной мере Z. Вычисление интеграла Ито для простой функции. Прогрессивно измеримые множества. Конструкция интеграла Ито на основе прогрессивно измеримых функций. Распространение интеграла на пространство L^2. Свойства интеграла Ито с переменным верхним пределом.</p>	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т
13	<i>Стохастические дифференциальные уравнения</i>	<p>Уравнение Ланжевена. Аналог теоремы Фубини для интеграла Ито. Винеровский процесс, как частный случай решения уравнения Ланжевена. Процесс Орнштейна-Уленбека. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения. Марковость решения стохастического дифференциального уравнения.</p>	ОПК-2	ДЗ, К, РК, Т

В графе 5 приводятся планируемые формы текущего контроля: защита лабораторной работы (ЛР), выполнение курсового проекта (КП), контрольной работы (КР), расчетно-графического задания (РГЗ), домашнего задания (ДЗ) написание реферата (Р), эссе (Э), коллоквиум (К), рубежный контроль (РК), тестирование (Т) и т.д.

4.2. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц (180 часов).

Вид работы	Трудоемкость, часы	
	5 семестр	Всего
Общая трудоемкость (в часах)	180	180
Контактная работа (в часах):	64	64
<i>Лекции (Л)</i>	32	32
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	32	32
Самостоятельная работа (в часах), в том числе контактная работа:	116	116
<i>Самостоятельное изучение разделов</i>	101	101
<i>Контрольная работа (КР)</i>	6	6
Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	9	9
Вид промежуточной аттестации	зачет	зачет

4.3. Лекционные занятия

№ п/п	Тема
1	<i>Случайные функции и их распределения. Цель и задачи изучения темы –ознакомить студентов с предметом теории случайных процессов, некоторыми задачами. Изучить случайные элементы и их распределения. Цилиндрическая σ-алгебра B_T. Случайная функция как семейство случайных элементов и как одно измеримое отображение. Описание B_T для бесконечного T. Согласованность меры. Формулировка теоремы Колмогорова. Построение семейства независимых случайных элементов с заданными распределениями.</i>
2	<i>Согласованные меры. Процесс с независимыми приращениями. Цель и задачи изучения темы – изучить совпадение борелевской и цилиндрической σ-алгебр в конечном произведении польских пространств. Регулярность мер в метрических пространствах. Аппроксимация меры борелевского множества мерами вложенных компактов. Цилиндрическая алгебра C_T. Доказательство теоремы Колмогорова. Конечномерные распределения случайной функции. Условия согласованности мер $\mathcal{Q}_{t_1, \dots, t_n}$ для упорядоченных наборов точек $t_1, \dots, t_n \in T$. Характеристическая функция меры на $(R^n, B(R^n))$. Условия согласованности мер на евклидовых пространствах в терминах характеристических функций.</i>
3	<i>Гауссовские процессы. Цель и задачи изучения темы – изучить многомерное нормальное распределение. Построение действительной гауссовской случайной функции по функции среднего и ковариационной функции. Комплекснозначные гауссовские процессы. Неотрицательно-определенные функции как ковариационные функции. Броуновское движение (винеровский процесс). Эквивалентность двух определений броуновского движения. Функции Хаара и Шаудера. Флуктуации последовательности стандартных гауссовских величин. Построение непрерывного</i>

	винеровского процесса на $[0, 1]$, а затем на $[0, \infty)$.
4	<i>Свойства траектории броуновского движения. Цель и задачи изучения темы</i> – изучить недифференцируемость п.н. траекторий винеровского процесса ни в одной точке $[0, \infty)$. Марковское свойство винеровского процесса. Марковские моменты, σ -алгебра F_τ . Строго марковское свойство винеровского процесса. Принцип отражения. Закон нуля или единицы. Распределения, связанные с максимумом винеровского процесса на $[0, t]$.
5	<i>Мартингалы. Цель и задачи изучения темы</i> – изучить мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры. Разложение Дуба. Компенсаторы. Дискретный вариант формулы Танака. Пополнение фильтрации. Квадратическая характеристика. Квадратическая вариация. Теорема Дуба о свободном выборе. Максимальное и минимальное неравенство Дуба для субмартингалов. Лемма о числе пересечений полосы. Теорема о сходимости субмартингалов. Ветвящийся процесс Гальтона - Ватсона.
6	<i>Слабая сходимость случайных элементов. Цель и задачи изучения темы</i> – изучить слабую сходимость мер в метрических пространствах. Сходимость с.э. по распределению. Критерий слабой сходимости. Сохранение слабой сходимости под действием непрерывных отображений, Слабая сходимость мер в $C(T, \mathcal{X})$. Относительная слабая компактность и плотность семейства мер. Формулировка теоремы Прохорова. Принцип инвариантности Донскера-Прохорова. Многомерная ЦПТ Линдеберга (формулировка), лемма о максимуме сумм независимых случайных величин.
7	<i>Марковские процессы. Цель и задачи изучения темы</i> – изучить эквивалентные определения марковского процесса. Лемма об аппроксимации $\sigma\{X_t, t \in U\} B(R)$ -измеримых функций. Марковость процессов с независимыми приращениями со значениями в R^d . Марковость d -мерного броуновского движения и пуассоновского процесса. Переходная функция марковского процесса. Нахождение переходной функции d -мерного броуновского движения.
8	<i>Цепи Маркова. Цель и задачи изучения темы</i> – изучить построение марковской цепи по начальному распределению и переходным вероятностям. Эквивалентное определение пуассоновского процесса как цепи Маркова. Явная конструкция пуассоновского процесса по последовательности независимых экспоненциальных величин.
9	<i>Системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Формулы Эрланга. Цель и задачи изучения темы</i> – изучить условие стандартности марковской цепи. Инфинитезимальная матрица Q стохастической полугруппы $P(t), t \geq 0$. Обратная и прямая системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Стационарное распределение как собственный вектор матрица Q^T . Формулы Эрланга.
10	<i>Интеграл по ортогональной случайной мере. Цель и задачи изучения темы</i> – изучить понятие о канонических представлениях случайных функций. Ортогональные случайные меры и их σ -конечные структурные меры. Интеграл по ортогональной случайной мере, его свойства. Построение ортогональной случайной меры, отвечающей данной структурной мере.
11	<i>Спектральное представление стационарных процессов. Цель и задачи изучения темы</i> – изучить стационарные в широком смысле процессы и их ковариационные функции. Теорема Герглотца. Непрерывность процессов в среднем квадратическом. Теорема Бохнера-Хинчина. Спектральное представление стационарных процессов с непрерывным и дискретным временем. Эргодичность в $L^2(\Omega)$. Процессы скользящего среднего. Статистическое оценивание ковариационной функции и спектральной плотности. Периодограмма и ее усреднение.
12	<i>Интеграл Ито. Цель и задачи изучения темы</i> – изучить некоторые подходы к

	построению стохастического интеграла. Предсказуемые множества. Построение ортогональной случайной меры Z на полукольце предсказуемых множеств, ее продолжение. Интеграл Ито, как интеграл по введенной мере Z . Вычисление интеграла Ито для простой функции. Прогрессивно измеримые множества. Конструкция интеграла Ито на основе прогрессивно измеримых функций.
13	<i>Стохастические дифференциальные уравнения. Цель и задачи изучения темы</i> – изучить уравнение Ланжевена. Аналог теоремы Фубини для интеграла Ито. Винеровский процесс, как частный случай решения уравнения Ланжевена. Процесс Орнштейна-Уленбека. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения.

4.4. Практические *занятия*

№ п/п	Тема
1	Случайные функции и их распределения
2	Согласованные меры. Процесс с независимыми приращениями
3	Гауссовские процессы
4	Свойства траектории броуновского движения
5	Мартингалы
6	Слабая сходимость случайных элементов
7	Марковские процессы
8	Цепи Маркова
9	Системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Формулы Эрланга.
10	Интеграл по ортогональной случайной мере
11	Спектральное представление стационарных процессов
12	Интеграл Ито
13	Стохастические дифференциальные уравнения

4.5. *Самостоятельное изучение разделов дисциплины*

№ п/п	Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение
1	Эмпирические меры, процессы частных сумм, процессы восстановления, модель страхования Крамера-Лундберга, пуассоновская случайная мера. Эквивалентные случайные функции.
2	Критерий существования процесса с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Броуновское движение (винеровский процесс).
3	Многомерное броуновское движение.
4	Закон повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма. Броуновский мост.
5	Сходимость мартингалов в $L^1(\Omega, F, P)$. Теорема Леви. Следствия для субмартингалов и мартингалов с непрерывным временем.
6	Схема доказательства критерия согласия Колмогорова. Броуновский мост как условный винеровский процесс.
7	Однородные процессы. Конечномерные распределения марковского процесса, их выражение через начальное распределение и переходную функцию.
8	Эргодическая теорема для цепей Маркова. Следствия. Инвариантная мера.

9	Модель системы массового обслуживания, приводящая к этим формулам. Коэффициент загрузки и вероятность потери требования в стационарном режиме.
10	Теорема Карунена о факторизации ковариационной функции и представлении процесса в виде интеграла по ортогональной случайной мере.
11	Задача линейного прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Разложение Вольда. Регулярные процессы, как физически осуществимые фильтры. Критерий Колмогорова регулярности процесса.
12	Распространение интеграла на пространство L^2 . Свойства интеграла Ито с переменным верхним пределом.
13	Марковость решения стохастического дифференциального уравнения.

5. Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Конечными результатами освоения программы дисциплины являются сформированные когнитивные дескрипторы «знать», «уметь», «владеть», расписанные по отдельным компетенциям. Формирование этих дескрипторов происходит в течение всего семестра по этапам в рамках различного вида занятий и самостоятельной работы.

В ходе изучения дисциплины предусматриваются текущий, рубежный контроль и промежуточная аттестация.

5.1. Оценочные материалы для текущего контроля. Цель текущего контроля – оценка результатов работы в семестре и обеспечение своевременной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы обучающегося. Объектом текущего контроля являются конкретизированные результаты обучения (учебные достижения) по дисциплине.

Текущий контроль успеваемости обеспечивает оценивание хода освоения дисциплины «Теория случайных процессов» и включает: ответы на теоретические вопросы на практическом занятии, решение практических задач и выполнение заданий на практическом занятии. Оценка качества подготовки на основании выполненных заданий ведется преподавателем (с обсуждением результатов), баллы начисляются в зависимости от сложности задания.

5.1.1. Вопросы по темам дисциплины «Теория случайных процессов» (контролируемые компетенции ОПК-2)

Устный опрос является одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Теория случайных процессов». Развёрнутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять определения.

Устные опросы проводятся во время практических занятий, а также в качестве дополнительного испытания при недостаточности результатов тестирования и решения задач. Вопросы опроса не должны выходить за рамки, объявленной для данного занятия темы. Устные опросы необходимо строить так, чтобы вовлечь в тему обсуждения максимальное количество обучающихся в группе, проводить параллели с уже пройденным учебным материалом данной дисциплины, находить удачные примеры из современной действительности, что увеличивает эффективность усвоения материала.

Основные вопросы для устного опроса доводятся до сведения студентов на предыдущем практическом занятии. При оценке опросов анализу подлежит точность формулировок, связность изложения материала, обоснованность суждений.

Вопросы по темам дисциплины «Теория случайных процессов» (контролируемые компетенции ОПК-2):

Тема 1. Случайные функции и их распределения

1. Предмет теории случайных процессов, некоторые задачи.
2. Случайные элементы и их распределения.
3. Цилиндрическая σ -алгебра B_T .
4. Случайная функция как семейство случайных элементов и как одно измеримое отображение.
5. Описание B_T для бесконечного T .
6. Согласованность меры.
7. Формулировка теоремы Колмогорова.
8. Построение семейства независимых случайных элементов с заданными распределениями.
9. Эмпирические меры, процессы частных сумм, процессы восстановления, модель страхования Крамера-Лундберга, пуассоновская случайная мера.
10. Эквивалентные случайные функции.

Тема 2. Согласованные меры. Процесс с независимыми приращениями

1. Совпадение борелевской и цилиндрической σ -алгебр в конечном произведении польских пространств.
2. Регулярность мер в метрических пространствах.
3. Аппроксимация меры борелевского множества мерами вложенных компактов.
4. Цилиндрическая алгебра C_T .
5. Доказательство теоремы Колмогорова.
6. Конечномерные распределения случайной функции.
7. Условия согласованности мер Q_{t_1, \dots, t_n} для упорядоченных наборов точек $t_1, \dots, t_n \in T$.
8. Характеристическая функция меры на $(R^n, B(R^n))$.
9. Условия согласованности мер на евклидовых пространствах в терминах характеристических функций.
10. Критерий существования процесса с независимыми приращениями.
11. Пуассоновский процесс.
12. Броуновское движение (винеровский процесс).

Тема 3. Гауссовские процессы

1. Многомерное нормальное распределение.
2. Построение действительной гауссовской случайной функции по функции среднего и ковариационной функции.
3. Комплекснозначные гауссовские процессы.
4. Неотрицательно-определенные функции как ковариационные функции.
5. Броуновское движение (винеровский процесс).
6. Эквивалентность двух определений броуновского движения.
7. Функции Хаара и Шаудера.
8. Флуктуации последовательности стандартных гауссовских величин.
9. Построение непрерывного винеровского процесса на $[0, 1]$, а затем на $[0, \infty)$.
10. Многомерное броуновское движение.

Тема 4. Свойства траектории броуновского движения

1. Недифференцируемость п.н. траекторий винеровского процесса ни в одной точке $[0, \infty)$.
2. Марковское свойство винеровского процесса.
3. Марковские моменты, σ -алгебра F_t .
4. Строго марковское свойство винеровского процесса.
5. Принцип отражения. Закон нуля или единицы.
6. Распределения, связанные с максимумом винеровского процесса на $[0, t]$.
7. Закон повторного логарифма.
8. Локальный закон повторного логарифма.
9. Броуновский мост.

Тема 5. Мартингалы

1. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры.
2. Разложение Дуба.
3. Компенсаторы.
4. Дискретный вариант формулы Танака.
5. Пополнение фильтрации.
6. Квадратическая характеристика.
7. Квадратическая вариация.
8. Теорема Дуба о свободном выборе.
9. Максимальное и минимальное неравенство Дуба для субмартингалов.
10. Лемма о числе пересечений полосы.
11. Теорема о сходимости субмартингалов.
12. Ветвящийся процесс Гальтона - Ватсона.
13. Сходимость мартингалов в $L^1(\Omega, F, P)$.
14. Теорема Леви. Следствия для субмартингалов и мартингалов с непрерывным временем.

Тема 6. Слабая сходимость случайных элементов

1. Слабая сходимость мер в метрических пространствах.
2. Сходимость с.э. по распределению.
3. Критерий слабой сходимости.
4. Сохранение слабой сходимости под действием непрерывных отображений.
5. Слабая сходимость мер в $C(T, \mathcal{X})$.
6. Относительная слабая компактность и плотность семейства мер.
7. Формулировка теоремы Прохорова.
8. Принцип инвариантности Донскера-Прохорова.
9. Многомерная ЦПТ Линдеберга (формулировка), лемма о максимуме сумм независимых случайных величин.
10. Схема доказательства критерия согласия Колмогорова.
11. Броуновский мост как условный винеровский процесс.

Тема 7. Марковские процессы

1. Эквивалентные определения марковского процесса.
2. Лемма об аппроксимации $\sigma\{X_t, t \in U\} | B(R)$ -измеримых функций.
3. Марковость процессов с независимыми приращениями со значениями в R^d .
4. Марковость d -мерного броуновского движения и пуассоновского процесса.
5. Переходная функция марковского процесса.
6. Нахождение переходной функции d -мерного броуновского движения.
7. Однородные процессы.
8. Конечномерные распределения марковского процесса, их выражение через начальное распределение и переходную функцию.

Тема 8. Цепи Маркова

1. Построение марковской цепи по начальному распределению и переходным вероятностям.
2. Эквивалентное определение пуассоновского процесса как цепи Маркова.
3. Явная конструкция пуассоновского процесса по последовательности независимых экспоненциальных величин.
4. Эргодическая теорема для цепей Маркова. Следствия.
5. Инвариантная мера.

Тема 9. Системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Формулы Эрланга.

1. Условие стандартности марковской цепи.
2. Инфинитезимальная матрица Q стохастической полугруппы $P(t), t \geq 0$.

3. Обратная и прямая системы дифференциальных уравнений Колмогорова.
4. Стационарное распределение как собственный вектор матрица Q^T .
5. Формулы Эрланга. Модель системы массового обслуживания, приводящая к этим формулам.
6. Коэффициент загрузки и вероятность потери требования в стационарном режиме.

Тема 10. Интеграл по ортогональной случайной мере

1. Понятие о канонических представлениях случайных функций.
2. Ортогональные случайные меры и их σ -конечные структурные меры.
3. Интеграл по ортогональной случайной мере, его свойства.
4. Построение ортогональной случайной меры, отвечающей данной структурной мере.
5. Теорема Карунена о факторизации ковариационной функции и представлении процесса в виде интеграла по ортогональной случайной мере.

Тема 11. Спектральное представление стационарных процессов

1. Стационарные в широком смысле процессы и их ковариационные функции.
2. Теорема Герглотца.
3. Непрерывность процессов в среднем квадратическом.
4. Теорема Бохнера-Хинчина.
5. Спектральное представление стационарных процессов с непрерывным и дискретным временем.
6. Эргодичность в $L^2(\Omega)$.
7. Процессы скользящего среднего.
8. Статистическое оценивание ковариационной функции и спектральной плотности.
9. Периодограмма и ее усреднение.
10. Задача линейного прогноза.
11. Регулярные и сингулярные процессы.
12. Разложение Вольда.
13. Регулярные процессы, как физически осуществимые фильтры.
14. Критерий Колмогорова регулярности процесса.

Тема 12. Интеграл Ито

1. Некоторые подходы к построению стохастического интеграла.
2. Предсказуемые множества.
3. Построение ортогональной случайной меры Z на полукольце предсказуемых множеств, ее продолжение.
4. Интеграл Ито, как интеграл по введенной мере Z .
5. Вычисление интеграла Ито для простой функции.
6. Прогрессивно измеримые множества.
7. Конструкция интеграла Ито на основе прогрессивно измеримых функций.
8. Распространение интеграла на пространство L^2 .
9. Свойства интеграла Ито с переменным верхним пределом.

Тема 13. Стохастические дифференциальные уравнения

1. Уравнение Ланжевена.
2. Аналог теоремы Фубини для интеграла Ито.
3. Винеровский процесс, как частный случай решения уравнения Ланжевена.
4. Процесс Орнштейна-Уленбека. T
5. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения.
6. Марковость решения стохастического дифференциального уравнения.

Критерии формирования оценок (оценивания) устного опроса.

В результате устного опроса знания, обучающегося оцениваются по следующей шкале:
4 балла, ставится, если обучающийся:

1) полно излагает изученный материал, даёт правильное определенное экономических понятий;

2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;

3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

3 балла, ставится, если обучающийся даёт ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для балла «1», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1-2 недочёта в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

2-1 балл, ставится, если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий;

2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;

3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

0 баллов, ставится, если обучающийся обнаруживает незнание большей части соответствующего раздела изучаемого материала, допускает ошибки в формулировке.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

5.1.2. Оценочные материалы для самостоятельной работы обучающегося (типовые задачи) (контролируемые компетенции ОПК-2)

Перечень типовых задач для самостоятельной работы сформирован в соответствии с тематикой практических занятий по дисциплине «Теория случайных процессов».

Тема 1. Случайные функции и их распределения

1. Пусть $X = X(\omega, t)$ - функция, определенная на $\Omega \times T$ и принимающая значения в R . Пусть, кроме того, E - множество всех функций $f : T \rightarrow R$. Рассмотрим на этом множестве σ -алгебру $E = \sigma(\{f : f(t) \in B\}, B \in \mathcal{B}(R), t \in T)$, которая называется цилиндрической σ -алгеброй. Докажите, что $(X_t = X(\cdot, t), t \in T)$ — случайный процесс тогда и только тогда, когда $X - (F|E)$ -измеримая функция.

2. Процессы $(X_t, t \in T)$ и $(Y_t, t \in \tilde{T})$ называются независимыми, если независимы порожденные ими σ -алгебры. Докажите, что $(X_t, t \in T)$ и $(Y_t, t \in \tilde{T})$ - независимы тогда и только тогда, когда для любых натуральных n, m и для любых $t_1, \dots, t_n \in T$, $\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_m \in \tilde{T}$ векторы $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ и $(Y_{\tilde{t}_1}, \dots, Y_{\tilde{t}_m})$ являются независимыми.

3. Нарисуйте траекторию процесса Y_t в модели страхования Спарре-Андерсена.

4. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ - процесс восстановления, Докажите, что $P(\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = +\infty) = 1$.

5. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ - процесс восстановления, построенный по независимым, но не обязательно одинаково распределенным случайным величинам $(\xi_n, n \in N)$.

а) Приведите пример подобного процесса, уходящего на бесконечность за конечное время с положительной вероятностью.

б) Приведите пример подобного процесса, не уходящего на бесконечность даже за бесконечное время.

6. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ - процесс восстановления, построенный по случайным величинам $\{\xi_n, n \in N\}$. Обозначим $\mu = E\xi_i, \sigma^2 = D\xi_i$, причем известно, что $\mu, \sigma^2 \in (0, +\infty)$. Докажите, что имеет место сходимость по распределению при $t \rightarrow +\infty$:

$$\frac{X_t - \frac{t}{\mu}}{\sigma \sqrt{t/\mu^2}} \rightarrow N(0,1).$$

7. Пусть $(\xi_n, n \in N)$ — случайный процесс, элементы которого ξ_1, ξ_2, \dots являются независимыми случайными величинами. Обозначим \mathcal{F}_n^∞ , где $F_n^\infty = \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$, остаточную σ -алгебру, т.е. пересечение всех σ -алгебр, порожденных наборами $(\xi_k, k \geq n+1)$. Докажите закон нуля или единицы: для любого события $A \in \mathcal{X}$ выполнено $P(A) = 0$ или $P(A) = 1$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Случайные функции и их распределения». Основная цель сформировать навыки решения задач по данной теме.

Тема 2. Согласованные меры. Процесс с независимыми приращениями

1. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ - процесс восстановления, построенный по $\{\xi_n, n \in N\}$. Верно ли, что процесс X_t всегда имеет независимые приращения?

2. Пусть $N^1 = (N_t^1, t \geq 0), \dots, N^k = (N_t^k, t \geq 0)$ - независимые пуассоновские процессы (т.е. независимыми являются порожденные ими σ -алгебры), причем N^i имеет интенсивность λ_i .

Докажите, что процесс $N_t = \sum_{i=1}^k N_t^i$ также является пуассоновским, и найдите его интенсивность.

3. Задан процесс где $\left\{ Y_t = \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j, t \geq 0 \right\}$, где $(\xi_n, n \in N)$ - независимые одинаково

распределенные случайные величины, не зависящие также от пуассоновского процесса

$N = (N_t, t \geq 0)$ интенсивности λ . Докажите, что процесс Y_t имеет независимые приращения.

4. Пусть $(\xi_n, n \in N)$ независимые экспоненциальные случайные величины с параметром λ , $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, а $N = (N_t, t \geq 0)$ - процесс восстановления, построенный по ним (пуассоновский процесс интенсивности λ). Для каждого $t > 0$ обозначим $V_t = S_{N_t+1} - t$ (“перескок”) и $U_t = t - S_{N_t}$ (“недоскок”).

а) Вычислите вероятность $P(V_t > v, U_t > u)$.

б) Докажите, что V_t и U_t - независимы и что $V_t \sim \text{Exp}(\lambda)$.

в) Вычислите функцию распределения U_t и EU_t .

5. Пусть $N = (N_t, t \geq 0)$ пуассоновский процесс интенсивности λ . Найдите математическое ожидание числа таких его скачков на отрезке $[0, T]$, что

а) в их правой δ -окрестности нет других скачков (эта окрестность может выходить и за пределы отрезка),

б) в их левой δ -окрестности нет других скачков.

6. Пусть $(N_t, t \geq 0)$ - пуассоновский процесс интенсивности λ . Найдите предел п.н. N_t/t при $t \rightarrow +\infty$.

7. Докажите, что у пуассоновского процесса $(N_t, t \geq 0)$ интенсивности $\lambda > 0$ не существует непрерывной модификации, т.е. не существует такого процесса $(X_t, t \geq 0)$, что для каждого $t \geq 0$ с вероятностью 1 $X_t = N_t$ и все траектории X_t непрерывны.

Замечание. Процесс $(Y_t, t \in T)$ называется модификацией процесса $(X_t, t \in T)$, если для любого $t \in T$ выполнено $P(X_t = Y_t) = 1$.

8. Пусть $X = (X_t, t \geq 0)$ - такой случайный процесс, для которого $P(X_s \leq X_t) = 1$ при $0 \leq s \leq t < \infty$. Предположим, что X непрерывен по вероятности справа в каждой точке s полупрямой $[0, \infty)$, т.е. X_t сходится по вероятности к X_s , когда $t \rightarrow s+0$. Докажите, что у X существует модификация, имеющая п.н. неубывающие траектории, непрерывные справа.

Указание: сначала надо установить утверждение из анализа. Пусть $f(x)$ - такая функция на $[0,1]$, что она не убывает по рациональным точкам. Докажите, что тогда функция $\tilde{f}(x)$, определенная как $\tilde{f}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} f(x)$ является непрерывной справа и неубывающей.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Согласованные меры. Процесс с независимыми приращениями». Основная цель сформировать навыки решения задач по данной теме.

Тема 3. Гауссовские процессы

1. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ винеровский процесс, Докажите, что следующие процессы тоже винеровские:

а) $X_t = -W_t$;

б) $X_t = \sqrt{c}W_{t/c}, c > 0$.

2. Пусть $(Y_t, t \in [0,1])$ - гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $r(s,t) = \min(s,t) - st$. Докажите, что такой процесс существует и что процесс $(X_t = (t+1)Y_{t/(t+1)}, t \geq 0)$ является винеровским.

3. Пусть W_t^1, \dots, W_t^d - независимые винеровские процессы. Докажите, что с вероятностью 1 процесс $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ (многомерный винеровский процесс) выйдет из шара произвольного фиксированного радиуса r с центром в нуле пространства.

4. Докажите, что существует гауссовский процесс $X = (X_t, t \in \mathbb{R}_+^d)$ с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией

$$R(s,t) = \prod_{k=1}^d \min(s_k, t_k),$$

где $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{R}_+^d, t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$.

5. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс, Докажите, что с вероятностью 1 его траектория имеет неограниченную вариацию на произвольном отрезке $[a,b]$, т.е. что

$$\sup_T \sum_{i=1}^n |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = +\infty \text{ п.н.,}$$

где $T = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$ - разбиение отрезка $[a,b]$.

6. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим разбиения отрезка $[a,b]$ точками $a = t_{n;0} < t_{n;1} < \dots < t_{n;N(n)} = b$, где $N(n) \in \mathbb{N}$ и $\Delta T(n) := \max_{k=0, \dots, N(n)} (t_{n;k+1} - t_{n;k}) \rightarrow 0$

при $n \rightarrow +\infty$. Положим $U_n := \sum_{k=0}^{N(n)-1} (W_{t_{n;k+1}} - W_{t_{n;k}})^2$. Найдите предел в среднем квадратическом величин U_n , когда $n \rightarrow +\infty$.

7. Пусть последовательность положительных чисел $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1/2} < \infty$.

Докажите, что тогда $|W_{t_n}| \rightarrow +\infty$ п.н. с ростом n . Здесь $(W_t, t \geq 0)$ винеровский процесс.

8. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ - гауссовский процесс со стационарными: независимыми приращениями (стационарные приращения означают, что распределение $X_t - X_s$ зависит только от $t-s$).

Докажите, что найдутся такие константы $a, b \in \mathbb{R}$, что процесс $Y_t = (X_t - at)/b$ является винеровским.

9. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ - независимые $N(0,1)$ случайные величины. Докажите, что процесс

$$X_t = \frac{\xi_0 t}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k} \xi_k$$

является винеровским на отрезке $[0, \pi]$ (ряд понимается как предел частичных сумм в L^2).

Указание: над разложить функцию $I_{[0, \pi]}(x)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе на $[0, \pi]$, составленной из $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx)$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Гауссовские процессы». Основная цель сформировать навыки решения задач по данной теме.

Тема 4. Свойства траектории броуновского движения

1. Найдите $EB_n(t)$ и $\text{cov}(B_n(s), B_n(t))$ для $s, t \in [0, 1]$ и $n \geq 0$. Докажите, что $B(t)$ - гауссовский процесс с $EB(t) = 0$ и $\text{cov}(B(s), B(t)) = \min\{s, t\}$ для $s, t \in [0, 1]$.

2. Пусть $\{t_n\}_{n \geq 1}$ - последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1/2} < \infty$. Докажите, что тогда $|W(t_n)| \rightarrow \infty$ п.н. при $n \rightarrow \infty$.

3. Рассмотрим последовательность $\prod_{n, n \in N}$, измельчающихся разбиений $(t_m^{(n)})$ отрезка $[0, t]$ точками специального вида $t_m^{(n)} = tm2^{-n}, m = 0, \dots, 2^n$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{2^n-1} (W(t_{m+1}^{(n)}) - W(t_m^{(n)}))^2 \rightarrow t \text{ п.н. при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

4. Покажите, что утверждение (1) о сходимости п.н. не обязано выполняться, если брать измельчающиеся произвольные разбиения $\prod_{n, n \in N}$, отрезка $[0, 1]$ точками $t_m^{(n)}, m = 0, \dots, N_n (n \in N)$, для которых

$$\max_{0 \leq m \leq N_n} (t_{m+1}^{(n)} - t_m^{(n)}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

(но тем не менее будет иметь место сходимость по вероятности).

5. Докажите, что почти все траектории винеровского процесса являются гёльдеровскими функциями с показателем $\gamma < 1/2$, т. е. на каждом временном отрезке $[a, b] \subset [0, \infty)$

$$|W(t) - W(s)| \leq C_\gamma |t - s|^\gamma, \quad s, t \in [a, b], \quad C_\gamma = \text{const} > 0.$$

Можно ли в приведенном результате взять константу C_γ не зависящей от промежутка $[a, b]$?

6. Докажите, что с вероятностью единица

$$\limsup_{t \rightarrow 0} W(t) / t^{1/2} = \infty$$

(тем самым условие Гёльдера порядка $1/2$ не выполняется в точке 0).

7. Пусть $X = \{X(t), t \in T\}, T \subset R$ - действительный случайный процесс и F_T - его естественная фильтрация. Пусть $\tau = \tau(\omega)$ - марковский момент относительно этой фильтрации; если $\tau(\omega) = \infty$, полагаем $X(\tau(\omega), \omega) = 0$. Можно ли утверждать, что $X(\tau(\omega), \omega)$ является $F_\tau | B(R)$ - измеримой величиной? Что можно сказать в случае $T = N$?

8. Положим $\tau_a = \inf\{t > 0 : W(t) = a\}$, где $W = \{W(t), t \geq 0\}$ - винеровский процесс, $a \in R$. Докажите, что $\tau_a \stackrel{d}{=} a^2 \tau_1$, т.е. распределения величин τ_a и $a^2 \tau_1$ совпадают: $\text{Law}(\tau_a) = \text{Law}(a^2 \tau_1)$.

Методические рекомендации по решению задач

При решении задач необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Свойства траектории броуновского движения». Основная цель сформировать навыки решения задач по данной теме.

Тема 5. Мартингалы.

1. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс. Докажите, что процесс $Y_t = W_t^2 - t$ является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t .

2. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс. Найдите все такие пары $(\alpha, \beta) \in R^2$, что процесс

$$(X_t = \exp\{\alpha W_t + \beta t\}, t \geq 0)$$

является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом) относительно естественной фильтрации процесса W_t .

3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - такая последовательность случайных величин, что для любого n существует плотность $f_n(x_1, \dots, x_n)$ случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) . Пусть $\eta_1, \dots, \eta_n, \dots$ - другая последовательность случайных величин, причем также для n любого существует плотность $g_n(x_1, \dots, x_n)$ случайного вектора (η_1, \dots, η_n) . Докажите, что процесс

$$X_n = \frac{g_n(\xi_1, \dots, \xi_n)}{f_n(\xi_1, \dots, \xi_n)}$$

является мартингалом относительно фильтрации $(F_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n), n \in N)$.

4. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс, а τ - момент остановки относительно его естественной фильтрации. Докажите, что процесс

$$(X_t = W_{\min(t, \tau)}, t \geq 0)$$

является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t .

Указание: надо аппроксимировать τ марковскими моментами с конечным числом значений.

5. Пусть $(X_n, n \in Z_+)$ - ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с законом размножения частиц $Pois(3)$. Найдите разложение Дуба-Мейера для данного процесса.

6. Докажите, что если τ марковский момент относительно $F = (F_t, t \geq 0)$, то τ является и опциональным моментом относительно F .

7. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс, а $\tau = \min\{t : |W_t| = 1\}$. Вычислите $E\tau$.

8. Пусть $(S_n, n \in N)$ - простейшее случайное блуждание с вероятностью шага вправо p . Пусть $a < x < b$ - целые числа, а $X_n = x + S_n, n \geq 1$. Обозначим $\tau = \min\{n : S_n \in \{a, b\}\}$ - момент выхода процесса X_n из полосы. Вычислите $E\tau$.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Мартингалы». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 6. Слабая сходимость случайных элементов

1. Докажите, что меры δ_{x_n} , заданные на борелевской σ -алгебре метрического пространства (S, ρ) , имеют слабый предел тогда и только тогда, когда существует такой элемент $x \in S$, что $\delta_{x_n} \xrightarrow{w} \delta_x$ при $n \rightarrow \infty$ (тогда $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ при $n \rightarrow \infty$).

2. Покажите, что класс множеств, определяющий (слабую) сходимость, является классом, определяющим меру. Объясните, почему обратное утверждение не обязано выполняться.

3. Докажите, что в польском пространстве R^∞ , снабженном метрикой вида

$$\rho((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

борелевская σ -алгебра совпадает с цилиндрической, а сходимость $Q_n \Rightarrow Q$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда слабо сходятся все конечномерные распределения. Иначе говоря, класс цилиндров в R^∞ одновременно является классом, определяющим и меру, и сходимость.

4. Покажите, что C порождает $B(S)$. Докажите, что если $Q_n \Rightarrow Q$ в $J(S)$, то $\varphi_{Q_n} \rightarrow \varphi_Q$ поточечно. Обратное, пусть $\varphi_{Q_n} \rightarrow \varphi$ поточечно, где $\varphi: S^* \rightarrow C$ и семейство $\{Q_n, n \geq 1\}$ плотно. Тогда $\varphi = \varphi_Q$ для некоторого $Q \in J(S)$ и $Q_n \Rightarrow Q$.

5. Докажите, что для любого целого неотрицательного числа j

$$P(\max_{0 \leq k \leq n} S_k \geq j) = 2P(S_n > j) + P(S_n = j),$$

где $S_0 = 0, S_k = X_1 + \dots + X_k, k \geq 1$, а X_1, X_2, \dots - введенные выше величины.

6. Пусть ξ_n^i , где $\xi, \xi_n, n \geq 1$, действительные случайные величины, причем функция $F_\xi(x)$ непрерывна на R . Тогда

$$\sup_{x \in R} |F_{\xi_n}(x) - F_\xi(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Докажите, что двузначных величин $X_i, i \in N$, и их сумм $S_k = X_1 + \dots + X_k, k \geq 1$, имеем

$$\max_j P(S_n = j) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

7. Докажите, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ во введенном выше пространстве $C(T, S)$ тогда и только тогда, когда $X_K^{\mathbb{N}} \rightarrow X_K$ в $C(K, S)$ для любого компакта $K \subset T$; здесь, как и прежде, X_K означает сужение функции $Y = \{Y_t, t \in T\}$ до функции $Y_K = \{Y_t, t \in K\}$.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Слабая сходимость случайных элементов». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 7. Марковские процессы

1. Пусть $(X_t, t \in T)$ марковский процесс, $T \subset R_+$. Пусть для любого $t \in T$ задана борелевская функция h_t . Рассматривается случайный процесс $Y_t = (h_t(X_t), t \in T)$. Докажите, что если h_t - биекция для любого $t \in T$ (считаем, что в этом случае h_t^{-1} - тоже борелевская), то Y_t - тоже марковский процесс. Приведите пример марковского процесса X_t и борелевских функций h_t , при которых процесс Y_t не является марковским.

2. Пусть $(X_t, t \in T), (Y_t, t \in T)$ независимые марковские процессы. Верно ли, что процесс $(X_t + Y_t, t \in T)$ тоже марковский?

3. Верно ли, что общее число частиц $Y = (Y_n = X_0 + \dots + X_n, n \in Z_+)$ ветвящегося процесса, Гальтона-Ватсона $X = (X_n, n \in Z_+)$ является марковским процессом а) относительно естественной фильтрации процесса, б) относительно естественной фильтрации процесса Y ?

4. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс. Является ли марковским процесс $X_t = W_t^2$?

5. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс, а $\tau_x = \min\{t: W_t = x\}$ для $x \geq 0$. Докажите, что процесс $\tau = (\tau_x, x \geq 0)$ является марковским.

6. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс, Вычислите его переходную плотность.

7. Пусть $(X_n, n \geq 0)$ - независимые случайные величины с равномерным распределением на множестве $\{-1, 0, 1\}$. Рассмотрим процесс

$$Y_n = X_0 X_1 + X_1 X_2 + \dots + X_{n-1} X_n,$$

Докажите, что X_n является мартингалом относительно фильтрации

$$F = (\sigma(X_1, \dots, X_n), n \in Z_+),$$

но не является марковским процессом относительно нее.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Марковские процессы». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 8. Цепи Маркова

1. Докажите, что процесс $(X_n, n \in Z_+)$ со значениями в не более чем счетном множестве \mathcal{X} является марковской цепью тогда и только тогда, когда, для любого $n \in Z_+$ и любых $a_{n+1}, \dots, a_0 \in \mathcal{X}$ выполнено

$$P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n, \dots, X_0 = a_0) = P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n)$$

всегда, когда вероятности условий положительны.

2. Пусть $\{\xi_n, n \in N\}$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $p(x)$, положительной при всех $x \in R$. Укажите, являются ли следующие случайные последовательности цепями Маркова:

а) $\xi = (\xi_n, n \in N)$;

б) $S = (S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, n \in Z_+)$, где $S_0 = 0$.

Для тех, которые окажутся цепями Маркова, укажите переходные вероятности за один шаг.

3. Пусть $\{\xi_n, n \in Z_+\}$ - марковская цепь с фазовым пространством $S = \{1, 2, 3\}$, начальным состоянием $\xi_0 = 1$ п. н. и матрицей переходных вероятностей:

$$\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix}.$$

Положим $\eta_n = I\{\xi_n = 1\} + 2I\{\xi_n \neq 1\}$. Докажите, что η_n тоже марковская цепь, и найдите ее матрицу переходов.

4. Марковская цепь $\{\xi_n, n \in Z_+\}$ имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности $P(\xi_{n+1} = k+1 | \xi_n = k) = p$, $P(\xi_{n+1} = k | \xi_n = k) = 1-p$, $k, n \in N, p \in [0, 1]$. Найдите распределение ξ_n . Докажите, что последовательность $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \min\{n : \xi_n = k\}$ также является цепью Маркова и найдите ее переходные вероятности.

5. Цепь Маркова ξ_n имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности

$$P(\xi_{n+1} = k+1 | \xi_n = k) = a^{-k}, \quad P(\xi_{n+1} = k | \xi_n = k) = 1 - a^{-k},$$

где $k, n \in Z_+, a > 1$. Найдите Ea^{ξ_n}, Da^{ξ_n} .

6. Приведите пример такой однородной марковской цепи с дискретным временем, что

а) унес есть несколько стационарных распределений, но нет предельного;

б) у нее нет стационарного распределения, но есть пределы переходных вероятностей при $n \rightarrow \infty$.

Докажите, что если однородная марковская цепь с дискретным временем имеет несколько стационарных распределений, то их, на самом деле, бесконечно много.

7. Пусть $(\xi_n, n \in Z_+)$ - независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями $\{0, 1, 2, 3\}$ и следующим распределением:

$$P(\xi_n = 0) = 1/7, \quad P(\xi_n = 1) = 2/7, \quad P(\xi_n = 2) = 3/7, \quad P(\xi_n = 3) = 1/7.$$

Рассматриваются процессы $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \pmod{4}, n \in N$ (остаток от деления суммы на 4) и $Y_n = \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n \pmod{4}$. Докажите, что $(X_n, n \in N)$ и $(Y_n, n \in N)$ являются однородными марковскими цепями, и найдите их предельные распределения.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Цепи Маркова». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 9. Системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Формулы Эрланга.

1. Докажите, что пуассоновский процесс интенсивности λ является однородной марковской цепью. Найдите его переходные вероятности, инфинитезимальную матрицу и стационарное распределение.
2. Всякий ли процесс восстановления является марковской цепью?
3. Пусть $n \times n$ матрица $Q = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ такова, что q_{ij} при $i \neq j$ и $\sum_{j=1}^n q_{ij} = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Докажите, что тогда матрицы $P(t) = \exp\{tQ\}$ образуют стохастическую полугруппу.

4. Докажите, что переходные вероятности $P_{ij}(t)$ стандартной стохастической полугруппы равномерно непрерывны на R_+ .
5. Система «массового обслуживания» состоит из прибора и «ремонтного устройства». Прибор работает случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром λ . Ремонт прибора занимает случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ . Обозначим $p_1(t) = P$ (прибор работает в момент времени t), $p_2(t) = P$ (прибор ремонтируется в момент времени t).

Найдите $p_i(t), i \in \{1, 2\}$, при условии $p_1(0) = p_2(0) = 1/2$, предполагая, что процесс образует марковскую цепь.

7. Пусть X_1, \dots, X_n - независимые неотрицательные одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Является ли процесс $Y = (Y(x), x \geq 0)$, где

$$Y(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I\{X_j \leq x\}$$

- это эмпирическая функция распределения, марковской цепью? Если да, то найдите ее переходные вероятности и проверьте на однородность.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Формулы Эрланга». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 10. Интеграл по ортогональной случайной мере

1. Пусть $\xi = (\xi_t, t \in [0, 1])$ - случайный процесс такой, что все $\xi_t, t \in T$, независимы в совокупности, одинаково распределены и нетривиальны (отличны от констант). Является ли процесс ξ стохастически непрерывным хотя в одной точке $[0, 1]$?

2. Приведите пример процесса $(X_t, t \in [0, 1])$, который является стохастически непрерывным на $[0, 1]$, но не интегрируемым по вероятности на $[0, 1]$ (интеграл по вероятности определяется как сходимость римановских интегральных сумм по вероятности).

Замечание. Данный пример показывает, что сходимость по вероятности достаточно плоха, ведь из непрерывности не следует интегрируемость, в отличие от сходимости в L^2 .

3. Является ли пуассоновский процесс $(N_t, t \geq 0)$ дифференцируемым а) по вероятности, б) в среднем квадратичном?

4. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ винеровский процесс. Найдите распределение случайной величины $X_t = \int_0^t W_s ds$. Докажите, что процесс является гауссовским.

5. Найдите для каждого $t \geq 0$ совместное распределение величин W_t и X_t из предыдущей задачи.

6. Задан случайный процесс, $X_t = \int_0^t e^{-W_s} ds$, где W_s винеровский процесс, Найдите функцию среднего и ковариационную функцию процесса.

7. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ винеровский процесс. Вычислите для $t > 0$ предел в L^2 при $n \rightarrow \infty$ у выражения

$$\sum_{i=1}^n W_{t(i-1)/n} (W_{i/n} - W_{t(i-1)/n}).$$

Методические рекомендации по решению задач

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Интеграл по ортогональной случайной мере». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 11. Спектральное представление стационарных процессов

1. Пусть Λ - множество, A - алгебра его подмножества, а μ - мера на A . Пусть отображение $Z: A \rightarrow L^2(\Omega, F, P)$ удовлетворяет равенству

$$EZ(B)\overline{Z(C)} = \mu(B \cap C) \text{ для любых } B, C \in A.$$

Докажите, что Z есть ортогональная мера на A .

2. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - числа из отрезка $[-\pi; \pi]$, а Φ_1, \dots, Φ_k - центрированные попарно некоррелированные случайные величины. Докажите, что процесс $(X_n, n \in Z)$, где

$$X_n = \sum_{j=1}^k e^{i\lambda_j n} \Phi_j,$$

является стационарным в широком смысле, и найдите его спектральное представление.

3. Пусть $\{X_n, n \in Z\}$ - стационарная в широком смысле последовательность со средним a и ковариационной функцией $R(n)$. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(k) \rightarrow 0.$$

тогда, и только тогда, когда, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(k) \rightarrow 0$.

4. Пусть центрированный стационарный в широком смысле процесс $(X_n, n \in Z)$ удовлетворяет равенству $X_0 = X_N$ п.н. для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Докажите, что тогда, для всех $n \in Z$ X_n имеет вид

$$X_n = \sum_{k=-[N/2]}^{[(N-1)/2]} e^{i \frac{2\pi k}{N} n} \Phi_k,$$

где Φ_k — центрированные попарно некоррелированные случайные величины из L^2 .

5. Пусть $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ - многочлен, а $P\left(\frac{d}{dt}\right)$ - соответствующий оператор дифференцирования в L^2 . Пусть $(\xi_t, t \in R)$ - стационарный в широком смысле процесс с известным спектральным представлением. Стационарный в широком смысле процесс $(X_t, t \in R)$ имеет спектральное представление и, кроме того, удовлетворяет уравнению

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)X_t = \xi_t.$$

Найдите спектральное представление для X_t . При каких условиях на многочлен P решение уравнения единственно?

6. Стационарный процесс $(X_t, t \in R)$ удовлетворяет равенству $dY_t/dt = X_t$, где стационарный

процесс $(X_t, t \in R)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \lambda^2 I\{|\lambda| < 1\}$. Найдите $\text{cov}(Y_1, Y_0)$.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Спектральное представление стационарных процессов». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 12. Интеграл Ито

1. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, и даны случайные величины $f_1 < \dots < f_n$; причем f_i является F_{t_i} -измеримой для всех $i = 1, \dots, n$. Докажите, что тогда, для ступенчатого процесса $f(t, \omega) = \sum_{i=1}^n f_i(\omega) I\{t_{i-1} < t \leq t_i\}$ процесс $J_t(f)$ является мартингалом с п.н. непрерывными траекториями.

2. Пусть τ момент остановки относительно естественной фильтрации винеровского процесса $(W_t, t \geq 0)$, причем $E\tau < +\infty$. Докажите, что

а) $\int_0^{+\infty} I\{t \leq \tau\} dW_t = W_\tau$, если τ принимает лишь конечное число значений;

б) $\int_0^{+\infty} I\{t \leq \tau\} dW_t = W_\tau$, если τ - произвольный.

3. Приведите пример стохастического дифференциального уравнения с нулевым начальным условием, решение которого не единственно.

4. Решите стохастические дифференциальные уравнения:

а) $dX_t = X_t dW_t, X_0 = 1$.

б) $dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + 2X_t dW_t, X_0 = 1$.

5. Докажите, что если $V(0)$ не зависит от винеровского процесса $(W_t, t \geq 0)$ и $V(0) \sim N(0, \sigma^2 / (2a))$, то решение $V = (V_t, t \geq 0)$ уравнения Ланжевена $dV_t = -aV_t dt + \sigma dW_t$, является гауссовским процессом с ковариационной функцией $\frac{\sigma^2}{2a} e^{-a|s-t|}$.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Интеграл Ито». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Тема 13. Стохастические дифференциальные уравнения

1. Приведите пример адаптированного, но не прогрессивно измеримого процесса.

2. Докажите, что равносильным образом опциональная σ -алгебра \mathcal{O} может быть определена как σ -алгебра подмножеств в $R_+ \times \Omega$, порожденная стохастическими интервалами вида $\llbracket 0, \tau \rrbracket := \{(t, \omega) : 0 \leq t < \tau(\omega)\}$,

где $\tau(\omega)$ - марковские моменты (относительно потока \mathcal{F}).

3. Докажите что равносильным образом предсказуемая σ -алгебра \mathcal{J} может быть определена как σ -алгебра, порожденная всеми согласованными процессами, траектории которых лишь непрерывны слева на $(0, \infty)$.

4. Пусть процесс X является прогрессивно измеримым и τ - конечный марковский момент. Покажите, что случайная величина X_τ будет F_τ -измеримой (это свойство является едва ли не определяющим целесообразность введения понятия прогрессивной измеримости).

5. Проверьте, что простые (кусочно-непрерывные справа) функции $f = f(t, \omega)$ вида

$$f(t, \omega) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k(\omega) 1_{[t_k, t_{k+1})}(t), \quad t \in [0, T],$$

где величины $\xi_k(\omega) - F_{t_k}$ -измеримы, $0 = t_0 < \dots < t_m = T$, являются опциональными.

б. Покажите, что простые (кусочно-непрерывные слева для $t \in (0, T]$ функции $f = f(t, \omega)$ вида

$$f(t, \omega) = \eta(\omega) 1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \eta_k(\omega) 1_{(t_k, t_{k+1}]}(t), \quad t \in [0, T],$$

где величина $\eta(\omega) - F_0$ -измерима, $\eta_k(\omega) - F_{t_k}$ -измеримы, $0 = t_0 < \dots < t_m = T$, являются предсказуемыми.

Методические рекомендации по решению задач

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Стохастические дифференциальные уравнения». Основная цель получить практический опыт решения задач по данной теме.

Критерии формирования оценок по заданиям для самостоятельной работы студента (типовые задачи):

«отлично» (4 балла) - обучающийся показал глубокие знания материала по поставленным вопросам, грамотно, логично его излагает, структурировал и детализировал информацию, избегая простого повторения информации из текста, информация представлена в переработанном виде. Свободно использует необходимые формулы при решении задач;

«хорошо» (3 балла) - обучающийся твердо знает материал, грамотно его излагает, не допускает существенных неточностей в процессе решения задач;

«удовлетворительно» (2 балла) - обучающийся имеет знания основного материала по поставленным вопросам, но не усвоил его деталей, допускает отдельные неточности при решении задач;

«неудовлетворительно» (менее 1 балла) – обучающийся допускает грубые ошибки в ответе на поставленные вопросы и при решении задач.

5.2. Оценочные материалы для рубежного контроля

Рубежный контроль осуществляется по более или менее самостоятельным разделам – учебным модулям курса и проводится по окончании изучения материала модуля в заранее установленное время. Рубежный контроль проводится с целью определения качества усвоения материала учебного модуля в целом. В течение семестра проводится **три таких контрольных мероприятия по графику**.

В качестве форм рубежного контроля можно использовать тестирование (письменное или компьютерное), проведение коллоквиума или контрольных работ. Выполняемые работы должны храниться на кафедре в течении учебного года и по требованию предоставляться в Управление контроля качества. На рубежные контрольные мероприятия рекомендуется выносить весь программный материал (все разделы) по дисциплине.

5.2.1. Оценочные материалы для контрольной работы (контролируемые компетенции ОПК-2). *Контрольная работа* – письменная работа небольшого объема, предполагающая проверку знаний заданного к изучению материала и навыков его практического применения. Проводится три раза в течение изучения дисциплины (семестр) в часы аудиторной работы. Не менее чем за 1 неделю до контрольной работы, преподаватель должен определить студентам исходные данные для подготовки: назвать разделы (темы, вопросы), по которым будут контрольные задания, теоретические источники (с точным указанием разделов, тем, статей) для подготовки.

Контрольные работы могут состоять из одного или нескольких заданий практического содержания. При выполнении контрольной работы пользоваться конспектами лекций, учебниками, задачками не разрешено. Длительность решения контрольных заданий составляет не более 90 минут.

Образцы контрольных заданий

Рейтинговая контрольная точка № 1

1. Пусть случайная величина Y - стандартная нормальная, а случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ задан равенством $X_t = t/\{t < |Y|\}$. Проверить, непрерывен ли X по вероятности. Найти конечномерные распределения 1 и 2 порядка.

2. Найти ковариационную функцию случайного процесса $\exp\{W_t\}$, где W_t - винеровский процесс.

3. Частица находится в одной из вершин единичного куба в трехмерном пространстве. В каждую единицу времени она выбирает одну из вершин, соседних с той, где она находится (каждую из таких - с одинаковой вероятностью), и переходит в нее. Сколько в среднем времени пройдет, прежде чем частица в первый раз придет в вершину, противоположную стартовой?

Рейтинговая контрольная точка № 2

1. Найти $\text{cov}(Y_0, Y_2)$, если $Y_t = dX_t/dt$, а процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ стационарен и имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \exp\{-\lambda^2/2\}$.

2. Пусть $S_0 = 0, S_n = X_1 + \dots + X_n$, где случайные величины $(X_n, n \in N)$ независимы и принимают значения 1 и -1 с одинаковыми вероятностями. При каких вещественных a случайный процесс $M_n = \exp\{S_n - an\}$ является: а) мартингалом; б) субмартингалом?

3. Пусть $\{W_t, t \geq 0\}$ - винеровский процесс. Найти $D \int_0^2 \exp\{2W_s\} dW_s$.

4. Пусть $\{W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}), t \geq 0\}$ - 2-мерный винеровский процесс. Найти стохастический дифференциал процесса $X_t = \ln\left(\left(W_t^{(1)}\right)^2 + \left(W_t^{(2)}\right)^2\right)$ (считать доказанным, что процесс никогда не попадает в начало координат).

Рейтинговая контрольная точка № 3

1. Доказать, что винеровский процесс не дифференцируем в среднем квадратическом.

2. Процесс X_n (n - целое неотрицательное) описывает движение частицы, выходящей из точки 0. Если частица в момент n была в одной из точек множества $\{-1, 0, 1, 2\}$, то она делает скачок вправо на единицу, скачок влево на единицу либо остается на месте с вероятностями соответственно 1/2, 1/6 и 1/3.

Достигнув точек -2 либо 3 , она на следующем шаге обязательно переходит в точку -1 и 2 соответственно (происходит отражение от экрана). Все скачки друг от друга независимы.

Найти:

а) математическое ожидание числа возвращений в нуль, которые произошли до первого отражения;

б) предел вероятности $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0)$.

Критерии формирования оценок по контрольным работам:

7 баллов - ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочетов; обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, решено 100% задач;

6 баллов - ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов. Обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, допуская незначительные неточности при решении задач, решено 70% задач;

5 баллов - ставится за работу, если студент правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или

допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой. Обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, решено 55% задач

менее 4 баллов – ставится за работу, если число ошибок и недочетов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы. Обучающийся дает неверную оценку ситуации, решено менее 50 % задач.

5.2.2. Оценочные материалы: типовые тестовые задания по дисциплине «Теория случайных процессов» (контролируемые компетенции ОПК-2). Тест – система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений студента. Решение заданий в тестовой форме проводится три раза в течение семестра на платформе <http://open.kbsu.ru/moodle/>. Не менее чем за 1 неделю до тестирования, преподаватель должен определить студентам исходные данные для подготовки к тестированию: назвать разделы (темы, вопросы), по которым будут задания в тестовой форме, теоретические источники (с точным указанием разделов, тем, статей) для подготовки.

Оценка результатов тестирования производится компьютерной программой, результат выдается немедленно по окончании теста. Максимальный балл за решение заданий в тестовой форме – 5 баллов. До окончания теста студент может еще раз просмотреть все свои ответы на задания и при необходимости внести коррективы.

Образцы тестовых заданий:

1. Если случайный процесс является стационарным в широком смысле, то
 - он является также стационарным в узком смысле
 - он является также гауссовским
 - он является также винеровским
 - его дисперсия равна константе
2. Спектральная плотность мощности стационарного в широком смысле случайного процесса является
 - вещественной функцией
 - неотрицательной функцией
 - неотрицательно определенной функцией
 - четной функцией
 - нечетной функцией
3. Для исчерпывающего описания процесса с независимыми значениями достаточно задать
 - его одномерную функцию распределения
 - его математическое ожидание и дисперсию
 - его корреляционную функцию
 - его спектральную плотность мощности
4. Для исчерпывающего описания процесса с независимыми приращениями достаточно задать
 - его одномерную функцию распределения
 - его математическое ожидание и дисперсию
 - его корреляционную функцию
 - его спектральную плотность мощности
5. Винеровский процесс является
 - гауссовским
 - стационарным в узком смысле
 - стационарным в широком смысле
 - процессом с нулевым математическим ожиданием
 - процессом с независимыми приращениями

- процессом с возрастающей дисперсией
6. Однородный дискретный марковский процесс с непрерывным временем исчерпывающе характеризуется
- матрицей переходных интенсивностей
 - матрицей переходных вероятностей
 - корреляционной функцией
 - одномерной функцией распределения
 - спектральной плотностью мощности
7. Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника стреляющим первым дуэлянтом при каждом выстреле равна $1/4$, вторым - $1/2$. Дуэль продолжается до первого попадания. Найти среднюю продолжительность дуэли.
- 1,6
 - 2,0
 - 2,2
 - 2,8
 - другой ответ
11. Одномерное броуновское движение частицы описывается
- процессом с независимыми значениями
 - пуассоновским процессом
 - стационарным в широком смысле процессом
 - стационарным в узком смысле процессом
 - винеровским процессом
12. Простейший поток событий обладает следующими свойствами:
- интервал времени между событиями распределен по показательному закону
 - число событий на заданном интервале времени распределено по закону Пуассона
 - количества событий на непересекающихся интервалах времени являются независимыми
 - промежутки времени до наступления очередного события распределены по нормальному закону
 - вероятность появления более одного события на интервале есть величина высшего порядка малости по сравнению с длиной интервала

5.3. Оценочные материалы для промежуточной аттестации

Целью промежуточных аттестаций по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися.

Промежуточная аттестация предназначена для объективного подтверждения и оценивания достигнутых результатов обучения после завершения изучения дисциплины. Осуществляется в конце семестра и представляет собой итоговую оценку знаний по дисциплине «Теория случайных процессов» в виде проведения зачета. На промежуточную аттестацию отводится до 25 баллов.

Полный перечень вопросов, выносимых на зачет (контролируемые компетенции ОПК-2):

1. Случайный элемент со значениями в измеримом пространстве, определение и примеры.
2. Пространство (R^T, B^T) .
3. Эквивалентность двух определений случайного процесса.
4. Конечномерные распределения, условия симметрии и согласованности.
5. Конечномерные распределения однозначно определяют меру на B^T .
6. Теорема Колмогорова о существовании процесса с заданным семейством конечномерных распределений.

7. Классы случайных процессов (с независимыми значениями, процессы восстановления, с независимыми приращениями, стационарные в узком и широком смысле, гауссовские, марковские, мартингалы).
8. Теорема о существовании гауссовского процесса с заданными средним и ковариационной функцией.
9. Виды непрерывности случайных процессов и их связь.
10. Эквивалентность случайных процессов.
11. Необходимые и достаточные условия существования эквивалентного процесса с непрерывными траекториями.
12. Теорема Колмогорова о существовании эквивалентного процесса с непрерывными траекториями.
13. Условия существования эквивалентного гауссовского процесса с непрерывными траекториями.
14. Два определения винеровского процесса и их эквивалентность.
15. Конструкция винеровского процесса на $[0, 1]$.
16. Задание винеровского процесса на полупрямой.
17. Определение пуассоновского процесса, пуассоновский процесс как процесс восстановления.
18. Сепарабельность случайного процесса.
19. Измеримость случайного процесса, существование измеримой модификации.
20. Интегрируемость траекторий процесса.
21. Недифференцируемость траекторий винеровского процесса.
22. Условное математическое ожидание и его свойства.
23. Мартингал, субмартингал, супермартингал (определения и результат применения выпуклой функции).
24. Лемме Дуба-Мейера.
25. Мартингальные неравенства.
26. Лемма Дуба о числе пересечений.
27. Теорема об отсутствии разрывов второго рода у субмартингалов.
28. Марковское свойство винеровского процесса.
29. Строго марковское свойство винеровского процесса.
30. Неравенство Леви.
31. Принцип отражения.
32. Закон повторного логарифма для винеровского процесса.
33. Локальный закон повторного логарифма.
34. Неограниченность вариации винеровских траекторий.
35. Интеграл Ито для ступенчатых функций и его свойства.
36. Интеграл Ито для функций из M_2 .
37. Формула Ито замены переменных.
38. Стохастический дифференциал.
39. Теорема существования сильного решения стохастического дифференциального уравнения.
40. Теорема единственности.
41. Корреляционная функция и ее свойства.
42. Необходимое и достаточное условие существования предела в среднем квадратичном.
43. Непрерывность процесса в среднем квадратичном.
44. Дифференцируемость процесса в среднем квадратичном.
45. Интегрируемость процесса в среднем квадратичном.
46. Связь дифференцируемости процесса в среднем квадратичном и дифференцируемости траекторий.
47. Ортогональные случайные меры, структурные меры.
48. Соответствие между ортогональными случайными мерами и процессами с ортогональными приращениями.
49. Стохастический интеграл (от неслучайной функции) и его свойства.
50. Пример стационарного гауссовского марковского процесса.

51. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса (на основе теорем функционального анализа).
52. Теорема Бохнера-Хинчина.
53. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса.
54. Линейные преобразования неслучайных функций.
55. Допустимый фильтр.
56. Примеры фильтров.
57. Решение дифференциального уравнения как допустимый фильтр.
58. Сингулярные и регулярные процессы. 59. Разложение Вольда.
60. Прогноз стационарного процесса

Критерии формирования оценок по промежуточной аттестации. Уровень знаний определяется оценками «зачтено», «не зачтено».

1. Студент показывает полные и глубокие знания программного материала, логично и аргументировано отвечает на поставленный вопрос, а также дополнительные вопросы, показывает высокий уровень теоретических знаний.

2. Студент показывает глубокие знания программного материала, грамотно его излагает, достаточно полно отвечает на поставленный вопрос и дополнительные вопросы, умело формулирует выводы. В тоже время при ответе допускает несущественные погрешности.

3. Студент показывает достаточные, но не глубокие знания программного материала; при ответе не допускает грубых ошибок или противоречий, однако в формулировании ответа отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами. Для получения правильного ответа требуется уточняющие вопросы.

4. Оценка «зачтено» (61-70 баллов) - уровень знаний студента соответствует требованиям, установленным в п. п. 1-3.

5. Оценка «не зачтено» (36-60 баллов) - студент показывает недостаточные знания программного материала, не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускаются грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на поставленный вопрос или затрудняется с ответом.

6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Максимальная сумма (70 баллов), набираемая студентом по дисциплине включает две составляющие:

– первая составляющая – оценка регулярности, своевременности и качества выполнения студентом учебной работы по изучению дисциплины в течение периода изучения дисциплины (семестра, или нескольких семестров) (сумма – не более 70 баллов). Баллы, характеризующие успеваемость студента по дисциплине, набираются им в течение всего периода обучения за изучение отдельных тем и выполнение отдельных видов работ.

– вторая составляющая – оценка знаний студента по результатам промежуточной аттестации (не более 25 –баллов).

Критерием оценки уровня сформированности компетенций в рамках учебной дисциплины «Теория случайных процессов» является зачет. Общий балл текущего и рубежного контроля складывается из составляющих, приведенных в Приложении 1.

Целью промежуточных аттестаций по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися. Критерии оценки качества освоения дисциплины прилагается (Приложение 2).

Типовые задания, обеспечивающие формирование компетенций ОПК-2 представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

Результаты обучения (компетенции)	Основные показатели оценки результатов обучения	Индикаторы достижения компетенции	Вид оценочного материала, обеспечивающие формирование компетенций
-----------------------------------	---	-----------------------------------	---

<p>ОПК-2- Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.</p>	<p>Знать: существующие принципы математических моделей стандартных задач в области профессиональной деятельности.</p>	<p>ОПК-2.1. Способен оценивать существующие принципы математических моделей.</p>	<p>Типовые оценочные материалы для устного опроса (раздел 5.1.1, №№1-5 и т.д.), типовые тестовые задания (раздел 5.2.2, №№1-8 и т.д.), типовые оценочные материалы к зачету (раздел 5.3, №№1-6 и т.д.)</p>
	<p>Уметь: выбирать необходимые методы исследования, модифицирует существующие и разрабатывает новые методы, исходя из задач конкретного исследования</p>	<p>ОПК-2.2. Способен выбирать необходимые методы исследования и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования.</p>	<p>Типовые оценочные материалы для устного опроса (раздел 5.1.1, №№1-5 и т.д.), типовые тестовые задания (раздел 5.2.2, №№1-6 и т.д.), типовые оценочные материалы к зачету (раздел 5.3, №№1-4 и т.д.)</p>
	<p>Владеть: приемами применения полученных результатов, представления итогов проделанной работы</p>		<p>Типовые оценочные материалы для устного опроса (раздел 5.1.1, №№1-3 и т.д.), типовые задания для самостоятельной работы (раздел 5.1.2, №№1-7 и т.д.), типовые контрольные работы (раздел 5.2.1, №№1-3 и т.д.), типовые тестовые задания (раздел 5.2.2, №№1-6 и т.д.), типовые оценочные материалы к зачету (раздел 5.3)</p>

Таким образом, выполнение типовых заданий, представленных в разделе 5 «Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации» позволит обеспечить:

- способность создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении (ОПК-2).

7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

7.1. Нормативно-законодательные акты

1. Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" от 29.12.2012 N 273-ФЗ (последняя редакция). - [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Консультант Плюс: URL: <http://consultant.ru/>
2. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования -специалитет по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, утвержденный приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. №16 (зарегистрировано в Минюсте РФ 6 февраля 2018 г. №49943). https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Spec/010501_C_3_18062021.pdf

7.2. Основная литература

1. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 400 с.
2. Галажинская, О. Н. Теория случайных процессов. Ч.1 : учебное пособие / О. Н. Галажинская, С. П. Моисеева. — Томск : Издательский Дом Томского государственного университета,

2015. — 128 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/109077.html>
3. Гугова, С. Г. Основы теории случайных процессов : учебно-методическое пособие / С. Г. Гугова, О. Н. Инденко, Е. С. Чернова. — Кемерово : КемГУ, 2021. — 159 с. — ISBN 978-5-8353-2869-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/233324>
 4. Лифшиц, М. А. Случайные процессы — от теории к практике : учебное пособие для вузов / М. А. Лифшиц. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 308 с. — ISBN 978-5-8114-9833-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/200411>

7.3. Дополнительная литература

1. Барлетт М.С. Введение в теорию случайных процессов. М.: Издательство иностранной литературы, 1958. 384 с.
2. Вентцель А.Д. Курс лекций по случайным процессам. М.: Наука, 1982.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977. 568 с.
4. Кирьянова, Л. В. Теория случайных процессов / Л. В. Кирьянова, А. Ю. Лемин, Т. А. Мацевич - Москва : Издательство МИСИ - МГСУ, 2017. - 98 с. - ISBN 978-5-7264-1584-0. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785726415840.html>
5. Хида Т. Броуновское движение. М.: Наука, 1988.
6. Хрущева, И. В. Основы математической статистики и теории случайных процессов : учебное пособие / И. В. Хрущева, В. И. Щербаков, Д. С. Леванова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 336 с. — ISBN 978-5-8114-0914-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210386>

7.4. Периодические издания

1. Доклады РАН
2. Журнал вычислительной математики и математической физики
3. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки
4. Успехи математических наук

7.5. Интернет-ресурсы

При изучении дисциплины «Теория случайных процессов» обучающиеся обеспечены доступом (удаленный доступ) к ресурсам:

– **общие информационные, справочные и поисковые:**

1. Справочная правовая система «Гарант». URL: <http://www.garant.ru>

2. Справочно-информационная система «Консультант Плюс». URL:

<http://www.consultant.ru/>

– **к современным профессиональным базам данных:**

№п/п	Наименование электронного ресурса	Краткая характеристика	Адрес сайта	Наименование организации-владельца
1.	Научная электронная библиотека (НЭБ РФФИ)	Электр. библиотека научных публикаций - около 4000 иностранных и 3900 отечественных научных журналов, рефераты публикаций 20 тыс. журналов, а также описания 1,5 млн. зарубежных и российских диссертаций; 2800 росс. журналов на безвозмездной	http://elibrary.ru	ООО «НЭБ» Лицензионное соглашение №14830 от 01.08.2014г. Бессрочное

		основе		
2.	База данных Science Index (РИНЦ)	Национальная информационно-аналитическая система, аккумулирующая более 6 миллионов публикаций российских авторов, а также информацию об их цитировании из более 4500 российских журналов.	http://elibrary.ru	ООО «НЭБ» Лицензионный договор Science Index №SIO-741/2022 от 19.07.2022 г. Активен до 31.07.2023г.
3.	ЭБС «Консультант студента»	13800 изданий по всем областям знаний, включает более чем 12000 учебников и учебных пособий для ВО и СПО, 864 наименований журналов и 917 монографий.	http://www.studmedlib.ru http://www.medcollegelib.ru	ООО «Консультант студента» (г. Москва) Договор №750КС/07-2022 От 26.09.2022 г. Активен до 30.09.2023г.
4.	«Электронная библиотека технического вуза» (ЭБС «Консультант студента»)	Коллекция «Медицина (ВО) ГЭОТАР-Медиа. Books in English (книги на английском языке)»	http://www.studmedlib.ru	ООО «Политехресурс» (г. Москва) Договор №701КС/02-2022 от 13.04.2022 г. Активен до 19.04.2023г.
	ЭБС «Лань»	Электронные версии книг ведущих издательств учебной и научной литературы (в том числе университетских издательств), так и электронные версии периодических изданий по различным областям знаний.	https://e.lanbook.com/	ООО «ЭБС ЛАНЬ» (г. Санкт-Петербург) Договор №41ЕП/223 от 14.02.2023 г. Активен до 15.02.2024г.
6.	Национальная электронная библиотека РГБ	Объединенный электронный каталог фондов российских библиотек, содержащий 4 331 542 электронных документов образовательного и научного характера по различным отраслям знаний	https://rusneb.ru/	ФГБУ «Российская государственная библиотека» Договор №101/НЭБ/1666-п от 10.09.2020г. Бессрочный
7.	ЭБС «IPSMART»	107831 публикаций, в т.ч.: 19071 – учебных изданий, 6746 – научных изданий, 700 коллекций, 343 журнала ВАК, 2085 аудиоизданий.	http://iprbookshop.ru/	ООО «Ай Пи Эр Медиа» (г. Саратов) Договор №75/ЕП-223 от 23.03.2023 г. Активен до 02.04.2024г.
8.	ЭБС «Юрайт» для СПО	Электронные версии учебной и научной литературы издательств «Юрайт» для СПО и электронные версии периодических изданий по	https://urait.ru/	ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ» (г. Москва) Договор №305/ЕП-223

		различным областям знаний.		От 27.10.2022 г. Активен до 31.10.2023 г.
9.	ЭБС «Юрайт» для ВО	Электронные версии 8000 наименований учебной и научной литературы издательств «Юрайт» для ВО и электронные версии периодических изданий по различным областям знаний.	https://urait.ru/	ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ» (г. Москва) Договор №44/ЕП-223 От 16.02.2023 г. Активен с 01.03.2023 г. по 29.02.2024 г.
10.	Polpred.com. Новости. Обзор СМИ. Россия и зарубежье	Обзор СМИ России и зарубежья. Полные тексты + аналитика из 600 изданий по 53 отраслям	http://polpred.com	ООО «Полпред справочники» Безвозмездно (без официального договора)
11.	Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина	Более 500 000 электронных документов по истории Отечества, российской государственности, русскому языку и праву	http://www.prlib.ru	ФГБУ «Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина» (г. Санкт-Петербург) Соглашение от 15.11.2016г. бессрочный

Для эффективного усвоения дисциплины, помимо учебного материала, студентам необходимо пользоваться данными всемирной сети Интернет, такими сайтами, как:

1. Библиотека КБГУ. URL: <http://lib.kbsu.ru>
2. Свободная энциклопедия «Википедия». URL: <https://ru.wikipedia.org/>
3. Служба тематических толковых словарей. URL: <http://glossary.ru/>
4. Электронно-библиотечная система «IPR BOOKS». URL: <http://www.iprbookshop.ru/>
5. Электронно-библиотечная система «Консультант студента». URL: <http://www.studentlibrary.ru/>

7.6. Методические указания по проведению различных учебных занятий, к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы

Методические рекомендации по изучению дисциплины «Теория случайных процессов» для обучающихся

Целью преподавания учебной дисциплины «Теория случайных процессов» являются фундаментальная подготовка в области построения и анализа сложных стохастических моделей, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в разнообразных приложениях.

Приступая к изучению дисциплины, обучающемуся необходимо ознакомиться с тематическим планом занятий, списком рекомендованной учебной литературы. Следует уяснить последовательность выполнения индивидуальных учебных заданий, занести в свою рабочую тетрадь темы и сроки проведения семинаров, написания учебных и творческих работ. При изучении дисциплины, обучающиеся выполняют следующие задания: изучают рекомендованную учебную и научную литературу; пишут контрольные работы, выполняют самостоятельные творческие работы, участвуют в выполнении практических заданий. Уровень и глубина усвоения дисциплины зависят от активной и систематической работы на лекциях, изучения рекомендованной литературы, выполнения контрольных письменных заданий.

Курс изучается на лекциях, семинарах, при самостоятельной и индивидуальной работе обучающихся. Обучающийся для полного освоения материала должен не пропускать занятия и активно участвовать в учебном процессе. Для максимальной эффективности изучения необходимо постоянно вести конспект лекций, знать рекомендуемую преподавателем литературу, позволяющую дополнить знания и лучше подготовиться к семинарским занятиям.

В соответствии с учебным планом на каждую тему выделено необходимое количество часов практических занятий, которые проводятся в соответствии с вопросами, рекомендованными к изучению по определенным темам. Обучающиеся должны регулярно готовиться к семинарским занятиям и участвовать в обсуждении вопросов. При подготовке к занятиям следует руководствоваться конспектом лекций и рекомендованной литературой. Тематический план дисциплины, учебно-методические материалы, а также список рекомендованной литературы приведены в рабочей программе.

Методические рекомендации при работе над конспектом во время проведения лекции

В процессе лекционных занятий целесообразно конспектировать учебный материал. Для этого используются общие и утвердившиеся в практике правила, и приемы конспектирования лекций.

Конспектирование лекций ведется в специально отведенной для этого тетради, каждый лист которой должен иметь поля, на которых делаются пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений.

Целесообразно записывать тему и план лекций, рекомендуемую литературу к теме. Записи разделов лекции должны иметь заголовки, подзаголовки, красные строки. Для выделения разделов, выводов, определений, основных идей можно использовать цветные карандаши и фломастеры.

Названные в лекции ссылки на первоисточники надо пометить на полях, чтобы при самостоятельной работе найти и вписать их. В конспекте дословно записываются определения понятий, категорий и законов. Остальное должно быть записано своими словами.

Каждому студенту необходимо выработать и использовать допустимые сокращения наиболее распространенных терминов и понятий.

Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Практические (семинарские) занятия – составная часть учебного процесса, групповая форма занятий при активном участии студентов. Практические занятия способствуют углубленному изучению наиболее сложных проблем науки и служат основной формой подведения итогов самостоятельной работы обучающихся. Целью практических занятий является углубление и закрепление теоретических знаний, полученных обучающимися на лекциях и в процессе самостоятельного изучения учебного материала, а, следовательно, формирование у них определенных умений и навыков.

В ходе подготовки к семинарскому занятию необходимо прочитать конспект лекции, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, выполнить выданные преподавателем практические задания. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы.

Желательно при подготовке к практическим занятиям по дисциплине одновременно использовать несколько источников, раскрывающих заданные вопросы.

На практических занятиях обучающиеся учатся грамотно излагать проблемы, свободно высказывать свои мысли и суждения, рассматривают ситуации, способствующие развитию профессиональной компетентности. Следует иметь в виду, что подготовка к практическому занятию зависит от формы, места проведения семинара, конкретных заданий и поручений. Это может быть написание доклада, эссе, реферата (с последующим их обсуждением), коллоквиум.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Самостоятельная работа (по В.И. Далу «самостоятельный – человек, имеющий свои твердые убеждения») осуществляется при всех формах обучения: очной и заочной.

Самостоятельная работа обучающихся - способ активного, целенаправленного приобретения студентом новых для него знаний и умений без непосредственного участия в этом процесса преподавателей. Повышение роли самостоятельной работы обучающихся при проведении различных видов учебных занятий предполагает:

- оптимизацию методов обучения, внедрение в учебный процесс новых технологий обучения, повышающих производительность труда преподавателя, активное использование информационных технологий, позволяющих обучающемуся в удобное для него время осваивать учебный материал;
- широкое внедрение компьютеризированного тестирования;
- совершенствование методики проведения практик и научно-исследовательской работы обучающихся, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят обучающихся к самостоятельному выполнению профессиональных задач;
- модернизацию системы курсового и дипломного проектирования, которая должна повышать роль студента в подборе материала, поиске путей решения задач.

Самостоятельная работа приводит студента к получению нового знания, упорядочению и углублению имеющихся знаний, формированию у него профессиональных навыков и умений. Самостоятельная работа выполняет ряд функций:

- развивающую;
- информационно-обучающую;
- ориентирующую и стимулирующую;
- воспитывающую;
- исследовательскую.

В рамках курса выполняются следующие виды самостоятельной работы:

1. Проработка учебного материала (по конспектам, учебной и научной литературе);
2. Выполнение разноуровневых задач и заданий;
3. Работа с тестами и вопросами для самопроверки;
4. Выполнение итоговой контрольной работы.

Студентам рекомендуется с самого начала освоения курса работать с литературой и предлагаемыми заданиями в форме подготовки к очередному аудиторному занятию. При этом актуализируются имеющиеся знания, а также создается база для усвоения нового материала, возникают вопросы, ответы на которые студент получает в аудитории.

Необходимо отметить, что некоторые задания для самостоятельной работы по курсу имеют определенную специфику. При освоении курса студент может пользоваться библиотекой вуза, которая в полной мере обеспечена соответствующей литературой. Значительную помощь в подготовке к очередному занятию может оказать имеющийся в учебно-методическом комплексе краткий конспект лекций. Он же может использоваться и для закрепления полученного в аудитории материала. Самостоятельная работа студентов предусмотрена учебным планом и выполняется в обязательном порядке. Задания предложены по каждой изучаемой теме и могут готовиться индивидуально или в группе. По необходимости студент может обращаться за консультацией к преподавателю. Выполнение заданий контролируется и оценивается преподавателем.

Для успешного самостоятельного изучения материала сегодня используются различные средства обучения, среди которых особое место занимают информационные технологии разного уровня и направленности: электронные учебники и курсы лекций, базы тестовых заданий и задач. Электронный учебник представляет собой программное средство, позволяющее представить для изучения теоретический материал, организовать апробирование, тренаж и самостоятельную творческую работу, помогающее студентам и преподавателю оценить уровень знаний в

определенной тематике, а также содержащее необходимую справочную информацию. Электронный учебник может интегрировать в себе возможности различных педагогических программных средств: обучающих программ, справочников, учебных баз данных, тренажеров, контролирующих программ.

Для успешной организации самостоятельной работы все активнее применяются разнообразные образовательные ресурсы в сети Интернет: системы тестирования по различным областям, виртуальные лекции, лаборатории, при этом пользователю достаточно иметь компьютер и подключение к Интернету для того, чтобы связаться с преподавателем, решать вычислительные задачи и получать знания. Использование сетей усиливает роль самостоятельной работы студента и позволяет кардинальным образом изменить методику преподавания.

Студент может получать все задания и методические указания через сервер, что дает ему возможность привести в соответствие личные возможности с необходимыми для выполнения работ трудозатратами. Студент имеет возможность выполнять работу дома или в аудитории. Большое воспитательное и образовательное значение в самостоятельном учебном труде студента имеет самоконтроль. Самоконтроль возбуждает и поддерживает внимание и интерес, повышает активность памяти и мышления, позволяет студенту своевременно обнаружить и устранить допущенные ошибки и недостатки, объективно определить уровень своих знаний, практических умений. Самое доступное и простое средство самоконтроля с применением информационно-коммуникационных технологий - это ряд тестов «on-line», которые позволяют в режиме реального времени определить свой уровень владения предметным материалом, выявить свои ошибки и получить рекомендации по самосовершенствованию.

Методические рекомендации по работе с литературой

Всю литературу можно разделить на учебники и учебные пособия, оригинальные научные монографические источники, научные публикации в периодической печати. Из них можно выделить литературу основную (рекомендуемую), дополнительную и литературу для углубленного изучения дисциплины.

Изучение дисциплины следует начинать с учебника, поскольку учебник – это книга, в которой изложены основы научных знаний по определенному предмету в соответствии с целями и задачами обучения, установленными программой.

При работе с литературой необходимо учитывать, что имеются различные виды чтения, и каждый из них используется на определенных этапах освоения материала.

Предварительное чтение направлено на выявление в тексте незнакомых терминов и поиск их значения в справочной литературе. В частности, при чтении указанной литературы необходимо подробнейшим образом анализировать понятия.

Сквозное чтение предполагает прочтение материала от начала до конца. Сквозное чтение литературы из приведенного списка дает возможность студенту сформировать свод основных понятий из изучаемой области и свободно владеть ими.

Выборочное – наоборот, имеет целью поиск и отбор материала. В рамках данного курса выборочное чтение, как способ освоения содержания курса, должно использоваться при подготовке к практическим занятиям по соответствующим разделам.

Аналитическое чтение – это критический разбор текста с последующим его конспектированием. Освоение указанных понятий будет наиболее эффективным в том случае, если при чтении текстов студент будет задавать к этим текстам вопросы. Часть из этих вопросов сформулирована в ФОС в перечне вопросов для собеседования. Перечень этих вопросов ограничен, поэтому важно не только содержание вопросов, но сам принцип освоения литературы с помощью вопросов к текстам.

Целью *изучающего* чтения является глубокое и всестороннее понимание учебной информации. Есть несколько приемов изучающего чтения:

1. Чтение по алгоритму предполагает разбиение информации на блоки: название; автор; источник; основная идея текста; фактический материал; анализ текста путем сопоставления имеющихся точек зрения по рассматриваемым вопросам; новизна.

2. Прием постановки вопросов к тексту имеет следующий алгоритм:

- медленно прочитать текст, стараясь понять смысл изложенного;
- выделить ключевые слова в тексте;
- постараться понять основные идеи, подтекст и общий замысел автора.

3. Прием тезирования заключается в формулировании тезисов в виде положений, утверждений, выводов.

К этому можно добавить и иные приемы: прием реферирования, прием комментирования.

Важной составляющей любого солидного научного издания является список литературы, на которую ссылается автор. При возникновении интереса к какой-то обсуждаемой в тексте проблеме всегда есть возможность обратиться к списку относящейся к ней литературы. В этом случае вся проблема как бы разбивается на составляющие части, каждая из которых может изучаться отдельно от других. При этом важно не терять из вида общий контекст и не погружаться чрезмерно в детали, потому что таким образом можно не увидеть главного.

Подготовка к зачету должна проводиться на основе лекционного материала, материала практических занятий с обязательным обращением к основным учебникам по курсу. Это позволит исключить ошибки в понимании материала, облегчит его осмысление, прокомментирует материал многочисленными примерами.

Методические рекомендации для подготовки к зачету

Зачет является формой итогового контроля знаний и умений, обучающихся по данной дисциплине, полученных на лекциях, практических занятиях и в процессе самостоятельной работы. Основой для определения оценки служит уровень усвоения обучающимися материала, предусмотренного данной рабочей программой. К зачету допускаются студенты, набравшие 36 и более баллов по итогам текущего и промежуточного контроля. На зачете студент может набрать не более 25 баллов.

В период подготовки к зачету обучающиеся вновь обращаются к учебно-методическому материалу и закрепляют промежуточные знания.

Подготовка обучающегося к зачету включает три этапа:

- самостоятельная работа в течение семестра;
- непосредственная подготовка в дни, предшествующие экзамену по темам курса;
- подготовка к ответу на экзаменационные вопросы.

При подготовке к зачету обучающимся целесообразно использовать материалы лекций, учебно-методические комплексы, нормативные документы, основную и дополнительную литературу.

На зачет выносится материал в объеме, предусмотренном рабочей программой учебной дисциплины за семестр. Экзамен проводится в письменной/устной форме. Зачет проводится в форме устного опроса по вопросам без подготовки.

При проведении зачет в письменной (устной) форме, ведущий преподаватель составляет экзаменационные билеты, которые включают в себя: тестовые задания; теоретические задания; задачи или ситуации. Формулировка теоретических задания совпадает с формулировкой перечня экзаменационных вопросов, доведенных до сведения обучающихся накануне экзаменационной сессии. Содержание вопросов одного билета относится к различным разделам программы с тем, чтобы более полно охватить материал учебной дисциплины.

В аудитории, где проводится устный зачет, должно одновременно находиться не более шести студентов на одного преподавателя, принимающего зачет. На подготовку ответа на билет на экзамене отводится 40 минут.

При проведении письменного экзамена на работу отводится 60 минут.

Результат устного (письменного) зачета выражается оценками:

Уровень знаний определяется оценками «зачтено», «не зачтено».

1. Студент показывает полные и глубокие знания программного материала, логично и аргументировано отвечает на поставленный вопрос, а также дополнительные вопросы, показывает высокий уровень теоретических знаний.

2. Студент показывает глубокие знания программного материала, грамотно его излагает, достаточно полно отвечает на поставленный вопрос и дополнительные вопросы, умело формулирует выводы. В тоже время при ответе допускает несущественные погрешности.

3. Студент показывает достаточные, но не глубокие знания программного материала; при ответе не допускает грубых ошибок или противоречий, однако в формулировании ответа отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами. Для получения правильного ответа требуется уточняющие вопросы.

4. Оценка «зачтено» (61-70 баллов) - уровень знаний студента соответствует требованиям, установленным в п. п. 1-3.

5. Оценка «не зачтено» (36-60 баллов) - студент показывает недостаточные знания программного материала, не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускаются грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на поставленный вопрос или затрудняется с ответом.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

8.1. Требования к материально-техническому обеспечению

Для реализации рабочей программы дисциплины «Теория случайных процессов» помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой специалитета, оснащены оборудованием и техническими средствами обучения: комплектом учебной мебели, наборами демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий по изучаемым разделам, обеспечивающие тематические иллюстрации.

Помещения для самостоятельной работы оснащены комплектами учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду КБГУ.

Компьютерная техника обеспечена необходимым комплектом лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства.

Электронно-библиотечные системы и электронная информационно-образовательная среда КБГУ обеспечивают доступ (удаленный доступ) обучающимся, к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Используется следующее программное обеспечение:

Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение

№	Наименование программы, право использования которой предоставляется	Страна происхождения	Срок действия программного обеспечения
1.	Техническая поддержка для операционной системы Конфигурация: «Рабочая станция» <i>Сертификат на техническую поддержку операционной системы РЕД ОС. Конфигурация: «Рабочая станция»</i>	Российская Федерация	12 месяцев
2.	Лицензия на программное обеспечение для поиска заимствований в текстовых документах распространённых форматов <i>Программная система для обнаружения текстовых заимствований в учебных и научных работах «Антиплагиат. Вуз 4.0», Модуль поиска текстовых заимствований «Объединенная коллекция 2020»</i>	Российская Федерация	12 месяцев / по истечении 2000 проверок

3.	Система оптического распознавания текста <i>SETERE OCR для РЭД ОС</i>	Российская Федерация	12 месяцев
4.	Редактор изображений <i>AliveColors Business (лицензия для образовательных учреждений)</i>	Российская Федерация	бессрочные
5.	Лицензия на программное обеспечение средств антивирусной защиты <i>Kaspersky Endpoint Security для бизнеса – Стандартный Russian Edition</i>	Российская Федерация	12 месяцев
6.	Пакет офисного программного обеспечения <i>Р7-Офис.Профессиональный (Десктопная версия)</i>	Российская Федерация	12 месяцев
7.	Право использования программного обеспечения для планирования и проведения онлайн-мероприятий (трансляций, телемостов/ аудио-видеоконференций, вебинаров) <i>Webinar Enterprise TOTAL 150 участников</i>	Российская Федерация	12 месяцев
8.	Пакет программного обеспечения для обработки растровых изображений <i>Creative Cloud for enterprise All Apps ALL Multiple Platforms Multi European Languages Enterprise Licensing Subscription Renewal, право на использование-50 шт.</i> <i>Acrobat Pro DC for teams ALL Multiple Platforms Multi European Languages Team Licensing Subscription Renewal, право на использование – 5 шт.</i>	Соединенные Штаты Америки	12 месяцев
9.	Лицензия на программное обеспечение для векторного графического редактора для создания и редактирования графических схем, чертежей и блок-схем <i>Асмо-графический редактор</i>	Российская Федерация	бессрочные
10.	Предоставление неисключительных прав на использование программного обеспечения Системы <i>Spider Project Professional</i>	Российская Федерация	бессрочные

8.2 Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья созданы специальные условия для получения образования. В целях доступности получения высшего образования по образовательным программам инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья университетом обеспечивается:

1. Альтернативная версия официального сайта в сети «Интернет» для слабовидящих;
2. Для инвалидов с нарушениями зрения (слабовидящие, слепые) - присутствие ассистента, оказывающего обучающемуся необходимую помощь, дублирование вслух справочной информации о расписании учебных занятий; наличие средств для усиления остаточного зрения, брайлевской компьютерной техники, видеувеличителей, программ невидимого доступа к информации, программ-синтезаторов речи и других технических средств приема-передачи учебной информации в доступных формах для студентов с нарушениями зрения;
3. Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху (слабослышащие, глухие) – звукоусиливающая аппаратура, мультимедийные средства и другие технические средства приема-передачи учебной информации в доступных формах;
4. Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата, созданы материально-технические условия обеспечивающие возможность беспрепятственного доступа обучающихся в учебные помещения, объекты питания, туалетные и другие помещения университета, а также пребывания в указанных помещениях (наличие расширенных дверных проемов, поручней и других приспособлений).

Обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечены электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.

Обучающимся с ограниченными возможностями здоровья предоставляются специальные учебники и учебные пособия, иная учебная литература, специальные технические средства обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь, а также услуги сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков.

а) для слабовидящих:

- на экзамене присутствует ассистент, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (он помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе записывая под диктовку);

- задания для выполнения, а также инструкция о порядке проведения зачете/экзамена оформляются увеличенным шрифтом;

- задания для выполнения на экзамене зачитываются ассистентом;

- письменные задания выполняются на бумаге, надиктовываются ассистенту;

- обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;

- студенту для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

в) для глухих и слабослышащих:

- на зачете/экзамене присутствует ассистент, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (он помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе записывая под диктовку);

- зачет/экзамен проводится в письменной форме;

- обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости поступающим предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- по желанию студента экзамен может проводиться в письменной форме;

д) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата (тяжелыми нарушениями

двигательных функций верхних конечностей или отсутствием верхних конечностей):

- письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или надиктовываются ассистенту;
- по желанию студента экзамен проводится в устной форме.

**ЛИСТ
изменений (дополнений) в рабочей программе дисциплины**

«Теория случайных процессов» по программе специалитета *01.05.01 Фундаментальные математика и механика*, профиль *«Фундаментальная математика»*
на _____ учебный год

№ п/п	Элемент (пункт) РПД	Перечень выносимых изменений (дополнений)	Примечание

Обсуждена и рекомендована на заседании кафедры *алгебры и дифференциальных уравнений*
протокол № _____ от « _____ » _____ 20__ г.

Заведующий кафедрой _____ / М.С. Нирова / _____
подпись, расшифровка подписи, дата

Распределение баллов текущего и рубежного контроля

№п/п	Вид контроля	Сумма баллов			
		Общая сумма	1-я точка	2-я точка	3-я точка
1	Посещение занятий	<i>до 10 баллов</i>	<i>до 3 б.</i>	<i>до 3 б.</i>	<i>до 4 б.</i>
2	Текущий контроль:	<i>до 24 баллов</i>	<i>до 8 б.</i>	<i>до 8б.</i>	<i>до 8 б.</i>
	Ответ на 4 вопроса	<i>от 0 до12 б.</i>	<i>от 0 до 4 б.</i>	<i>от 0 до 4 б.</i>	<i>от 0 до 4 б.</i>
	Полный правильный ответ	до 12 баллов	4 б.	4 б.	4 б.
	Неполный правильный ответ	от 3 до12 б.	от 1 до 4 б.	от 1 до 4 б.	от 1 до 4 б.
	Ответ, содержащий неточности, ошибки	0б.	0б.	0б.	0б.
	Выполнение самостоятельных заданий (решение задач)				
		<i>от 0 до12 б.</i>	<i>от 0 до 4 б.</i>	<i>от 0 до 4 б.</i>	<i>от 0 до 4 б.</i>
3	Рубежный контроль	<i>до 36 баллов</i>	<i>до 12 б.</i>	<i>до 12 б.</i>	<i>до 12 б.</i>
	тестирование	от 0- до 15 б.	от 0- до 5 б.	от 0- до 5 б.	от 0- до 5 б.
	контрольная работа	от 0 до 21 б.	от 0 до 7 б.	от 0 до 7 б.	от 0 до 7 б.
	Итого сумма текущего и рубежного контроля	<i>до 70 баллов</i>	<i>до 23б.</i>	<i>до 23 б.</i>	<i>до 24 б.</i>

Шкала оценивания планируемых результатов обучения

Текущий и рубежный контроль

Семестр	Шкала оценивания			
	0-35 баллов	36-50 баллов	51-60 баллов	56-70 баллов
5	Частичное посещение аудиторных занятий. Неудовлетворительное выполнение лабораторных и практических работ. Плохая подготовка к балльно-рейтинговым мероприятиям. Студент не допускается к промежуточной аттестации	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Частичное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценку «удовлетворительно».	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «хорошо».	Полное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических занятий. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «отлично».

Промежуточная аттестация (зачёт)

Семестр	Шкала оценивания	
	Незачтено (36-60)	Зачтено (61-70)
5	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачёте не ответил ни на один вопрос.	Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете представил полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на оба вопроса. Студенту, имеющему 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, выставляется отметка «зачтено» без сдачи зачёта.

«Зачтено» выставляется обучающемуся, продемонстрировавшему полное, всестороннее, осознанное правильное знание программного материала и изложившему ответ логично, грамотно, убедительно, готового к дальнейшему профессиональному совершенствованию.

При ответе обучающийся может допустить некоторые неточности, негрубые ошибки, затрудняться в самостоятельном изложении материала, но правильно отвечать на задаваемые ему вопросы, в результате наводящих вопросов с помощью преподавателя исправлять допущенные ошибки и неточности.

«Не зачтено» может быть выставлено обучающемуся, обнаружившему неполное, неосознанное знание учебно-программного материала, допускающему грубые ошибки, неспособному самостоятельно изложить ответ на вопрос, отвечающему неправильно или не дающему ответ на заданные вопросы. Демонстрируемый уровень знаний не может быть признан достаточным для профессиональной деятельности.