

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный  
университет им. Х.М. Бербекова»  
(КБГУ)

Институт математики и естественных наук

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ОПОП

  
Р.Ш.Тешев

«12» февраля 2025 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

---

*наименование дисциплины*

Специальность

11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы

Специализация

Радиоэлектронные системы передачи информации

Квалификация (степень) выпускника

Инженер

Форма обучения

Очная

Нальчик 2025

**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций**

Таблица 1.

| Код и формулировка компетенции   | Индикаторы достижения  | Планируемые результаты обучения по дисциплине (ЗУН)   |
|--|--|---|
| <b>Общепрофессиональные</b>  |  |   |
| <b>ОПК-1.</b> Способен представить адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов естественных наук и математики.   | <b>ОПК-1.1.</b> Способен использовать рационалистический подход к изучению предметов и явлений в конкретных областях науки | <b>Знать</b> фундаментальные законы природы и основные физические и математические законы                                 |
|  | <b>ОПК-1.2.</b> Способен выбирать и объединять полученные знания в целостную систему                                       | <b>Уметь</b> применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера |
|  | <b>ОПК-1.3.</b> Способен использовать методы и процедуры для обоснования решений практических задач.                       | <b>Владеть</b> навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач                           |
| <b>ОПК-2.</b> Способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и применять соответствующий физико-математический аппарат для их формализации, анализа и принятия решения | <b>ОПК-2.1.</b> Способен оперировать научными фактами, опираясь на законы логики   | <b>Знать</b> фундаментальные законы природы и основные физические и математические законы                                 |
|  | <b>ОПК-2.2.</b> Способен осознанно выбирать методы и средства изучения объектов и проблем                                  | <b>Уметь</b> применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера |
|  | <b>ОПК-2.3.</b> Способен применять современные достижения компьютерных технологий для решения практических задач           | <b>Владеть</b> навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач                           |

## 2 Шкала оценивания планируемых результатов обучения

### 2.1 Текущий контроль

Оценка результатов текущей успеваемости в рамках контрольных точек осуществляется посредством 70-балльной системы, при этом за добросовестное посещение занятий обучающийся может набрать до 10 баллов, за качественное прохождение оценочных мероприятий - до 60 баллов.

#### Карта распределения рейтинговых баллов в рамках текущего контроля

Таблица 2.

| № | Оценочное средство | Форма проведения | Порядок проведения | Максимальное количество баллов | Критерии оценивания |
|---|--------------------|------------------|--------------------|--------------------------------|---------------------|
|---|--------------------|------------------|--------------------|--------------------------------|---------------------|

### 1 рейтинговая точка

|   |   |            |   |    |   |
|---|---|------------|---|----|---|
| 1 | <p>Контрольная работа по разделам векторная алгебра, прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве, линии второго порядка.<sup>1</sup></p> | Письменная | <p>Контрольная работа состоит из двух частей:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• теоретической, содержащей вопросы, формулируемые в начале каждой пройденной лекции</li> <li>• практической, включающей 4 задачи</li> </ul> | 10 | <p><b>10</b> – полный ответ, который <i>содержит</i>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• правильное решение всех задач, с корректной записью входных данных;</li> <li>• точную формулировку понятий,</li> <li>• корректную формулировку всех законов и их <u>вывод</u> там, где это необходимо;</li> </ul> <p><b>8-9</b> – все задачи решены верно, теоретические ответы в основном правильные, но содержат незначительные ошибки при выводе основных формул и законов, нет примеров практического применения;</p> <p><b>6-7</b> – решены верно 3 задачи, студент правильно формулирует основные понятия и законы, пишет формулы, но не приводит примеры их практического использования</p> <p><b>5</b> – есть верное решение 2 задач, теоретические ответы содержат незначительные ошибки, при написании основных формул и законов допущены ошибки, отсутствуют примеры о практическом применении</p> <p><b>3-4</b> – получены правильные численные ответы в 2 задачах, однако отсутствуют нужные рисунки или таблицы, теоретические ответы частичные</p> <p><b>1-2</b> – правильно решена 1 задача, даны формулировки основных законов частично и без пояснений</p> <p><b>0</b> – нет решенных задач, теоретические ответы отсутствуют или полностью неверные</p> |
|---|---|------------|---|----|---|

<sup>1</sup> В течение I рейтинговой точки студент обязан выполнить контрольную работу.

|                             |  |                     |   |    |  |
|-----------------------------|--|---------------------|---|----|--|
| 2.                          | Конспекты лекций по разделам векторная алгебра, прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве, линии второго порядка.             | Письменная          | Домашнее конспектирование и проработка лекций, читаемых преподавателем и загруженных в виде презентаций в ЭИОС  | 8  | 4 – конспекты написаны аккуратно, содержат все темы, материал освещен полностью, имеются хорошие иллюстрации и графики<br>3 – конспекты написаны полностью, аккуратно, но отсутствуют некоторые иллюстрации или графики<br>2 – конспекты сокращены, отсутствуют некоторые иллюстрации и графики<br>1-конспекты значительно сокращены, отсутствуют иллюстрации и графики<br>0 – конспекты отсутствуют |
| 3.                          | Тестирование по разделам векторная алгебра, прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве, линии второго порядка.                 | С использованием ПК | Составленные преподавателями кафедры тесты, загруженные в ЭИОС университета   | 12 | Оценивание проводится самой компьютерной системой тестирования с учетом максимальных баллов; окончательные баллы выставляются преподавателем после округления до целых чисел   |
| <b>II рейтинговая точка</b> |  |                     |   |    |  |
|                             | Контрольная работа по разделам алгебра матриц, арифметическое векторное пространство, исследование систем линейных уравнений. <sup>2</sup> | Письменная          | Контрольная работа состоит из двух частей: <ul style="list-style-type: none"> <li>• теоретической, содержащей вопросы, формулируемые в начале каждой пройденной лекции;</li> <li>• практической, включающей 4 задачи</li> </ul> | 10 | Критерии оценивания повторяют № 1 данной таблицы   |
|                             | Конспекты лекций по разделам алгебра матриц, арифметическое векторное пространство, исследование систем линейных уравнений.                | Письменная          | Домашнее конспектирование и проработка лекций, читаемых преподавателем и загруженных в виде презентаций в ЭИОС  | 8  | Критерии оценивания повторяют № 2 данной таблицы   |

<sup>2</sup> В течение II рейтинговой точки студент обязан выполнить контрольную работу

|   |                     |   |    |  |
|---|---------------------|---|----|--|
| Тестирование по разделам алгебры матриц, арифметическое векторное пространство, исследование систем линейных уравнений. | С использованием ПК | Составленные преподавателями кафедры тесты, загруженные в ЭИОС университета | 12 | Критерии оценивания повторяют № 3 данной таблицы |
| всего   |                     |   | 60 |  |

### Карта распределения баллов в рамках промежуточной аттестации

Таблица 3

| № | Оценочное средство | Форма проведения | Порядок проведения  | Максимальное количество баллов                        | Критерии оценивания  |
|---|--------------------|------------------|---|---|--|
| 1 | Зачетная работа    | Письменная       | Работа содержит задания – 2 теоретических вопроса и 4 задачи. | Теоретический вопрос – 10 баллов. Задача – 20 баллов. | <p><b>Критерии оценивания теоретического вопроса:</b></p> <p>От 8 до 10 баллов: Глубокий уровень владения материалом, точное знание ключевых концепций, способность анализировать и интерпретировать факты, грамотно строить высказывания, привести примеры, свободно оперировать терминологией.</p> <p>От 6 до 7 баллов: Базовое владение предметом, умение последовательно раскрыть основную мысль вопроса, грамотное применение терминов, наличие существенных элементов анализа и обобщений, но недостаточное развертывание или отдельные неточности.</p> <p>От 4 до 5 баллов: Частичное освоение материала, попытка объяснить основной смысл вопроса, использование некоторых базовых терминов, но отсутствие глубокого понимания сложных моментов, логические недостатки изложения, отсутствие</p> |

|  |  |  |  |   |
|--|--|--|--|---|
|  |  |  |  | <p>выводов.</p> <p>От 2 до 3 баллов: Ошибочные представления, слабо выраженное владение основными понятиями, значительные затруднения в интерпретации вопросов, существенные фактологические ошибки, отсутствие обоснованных выводов и примеров.</p> <p>От 0 до 1 балла: Полное непонимание темы, неспособность сформулировать адекватный ответ, грубые ошибки, несоответствие требованиям задания.</p> <p><b><u>Критерии оценивания задач:</u></b></p> <p>0 - Отсутствие правильного подхода. Нет попыток решить задачу правильным методом или представленная работа совершенно неправильна.</p> <p>5 -Верно начатое решение, правильно определены ключевые шаги, но значительная часть рассуждений выполнена некорректно либо пропущены важные элементы анализа или расчёта. Итоговое решение неверно.</p> <p>10- Правильно сформулирован общий подход к решению, однако допущены существенные ошибки в вычислениях или неверно применены отдельные формулы. Основные идеи решения сохранены, но реализация неполная.</p> <p>15 - Решение верное, но имеются небольшие погрешности в оформлении или аргументации отдельных этапов. Возможно наличие незначительных вычислительных ошибок, исправляемых самостоятельно.</p> <p>20 - Все этапы решения выполнены верно, обоснования</p> |
|--|--|--|--|---|

|  |  |  |  |  |                |
|--|--|--|--|--|----------------|
|  |  |  |  |  | ясны и понятны |
|--|--|--|--|--|----------------|

### 3. Оценочные материалы для текущего и промежуточного контроля успеваемости

#### 3.1. Оценочные материалы для текущего контроля

#### Примеры вариантов контрольных работ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 ВАРИАНТ 1

##### Теоретическая часть

1. Векторы. Линейные операции над векторами.
2. Прямые в  $R^2$ . Различные виды уравнения прямой на плоскости. Отклонение точки от прямой.

##### Задачи

1. На гиперболе  $16x^2 - 49y^2 = 784$  найти точки, которые были бы в три раза ближе к одной асимптоте, чем к другой.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(5, 4, 3)$  и отсекающей равные отрезки на осях координат.
3. Дано:  $|\overline{AB}| = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $|\overline{BC}| = -4\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\overline{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$ . Доказать, что  $ABCD$  – трапеция.
4. Написать уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом  $24x^2 + 49y^2 = 1176$ , при условии, что ее эксцентриситет  $e = 1,25$ .

#### ВАРИАНТ 2

##### Теоретическая часть

1. Скалярное произведение векторов. Свойства.
2. Прямая и плоскость в пространстве. Общее уравнение прямой и плоскости.

##### Задачи

1. Даны два вектора  $\vec{a} = (3, -2, 6)$  и  $\vec{b} = (-2, 1, 0)$ . Определить проекции на координатные оси следующих векторов: а)  $\vec{a} + \vec{b}$ , б)  $\vec{a} - \vec{b}$ .
2. Вычислить величину отклонения и расстояние от точки  $A(-2, -4, 3)$  до плоскости  $2x - y + 2z = 3 = 0$ .
3. Найти эксцентриситет и директрисы эллипса:  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$
4. Определить угол между двумя прямыми  $(l_1)$  и  $(l_2)$ , если  
 $(l_1): 2x + 5y - 3 = 0$        $(l_2): 5x - 2y - 6 = 0$

#### ВАРИАНТ 3

##### Теоретическая часть

1. Векторное произведение векторов. Геометрический смысл векторного произведения.
2. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости. Угол между прямыми, плоскостями, прямыми и плоскостями.

##### Задачи

1. На гиперболе  $144x^2 - 169y^2 = 24336$  найти точки, для которой фокальные радиус-векторы перпендикулярны друг к другу.
2. Найти координаты вершин параболы и величину параметра  $p$ , если  $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ .

3. Найти вектор  $\bar{x}$  из уравнения  $\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 + 3\bar{a}_3 + 4\bar{x} = 0$ , где  $\bar{a}_1 = (5, -8, -1, 2)$ ,  $\bar{a}_2 = (2, -1, 4, -3)$ ,  $\bar{a}_3 = (-3, 2, -5, 4)$ .
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(4, -5)$  параллельно прямой  $2x - 3y + 6 = 0$ .

#### ВАРИАНТ 4

##### Теоретическая часть

1. Кривые второго порядка. Канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы.
2. Предикаты. Подмножество истинности предиката. Операции над предикатами.

##### Задачи

1. Найти угол между прямыми  $\frac{x-2}{11} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{10}$  и  $\frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{2}$ .
2. Найти длину вектора  $AB$ , если  $A(3, 2)$ ,  $B(-1, -1)$ .
3. Найти точки пересечения эллипса  $x^2 + 3y^2 = 36$  с прямой  $2x - y - 9 = 0$ .
4. Найти расстояние от точки  $A(1; 3; -2)$  до плоскости  $3x - y + 5z + 1 = 0$ .

#### ВАРИАНТ 5

##### Теоретическая часть

1. Эксцентриситет. Директриса. Асимптота.
2. Смешанное произведение векторов. Свойства. Геометрический смысл смешанного произведения.

##### Задачи

1. Найти угол между прямой  $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$  и плоскостью  $22x + 4y + 20z = 0$ .
2. Привести к нормальному виду уравнение прямой  $3x - 4y + 10 = 0$ .
3. Составить параметрические уравнения прямой  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z}{-2}$ .
4. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки  $A(4; 0)$ ,  $B(5; 3)$  и  $C(2; 8)$ .

#### ВАРИАНТ 6

##### Теоретическая часть

1. Прямые в  $R^2$ . Различные виды уравнения прямой на плоскости. Отклонение точки от прямой.
2. Решение СЛУ методом Крамера. Метод Гаусса.

##### Задачи

1. Через точку  $A(2; 1)$  провести такую хорду параболы  $y^2 = 4x$ , которая делилась бы в данной точке пополам.
2. Векторы  $a$  и  $b$  образуют угол  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Зная, что  $|a| = 6$ ,  $|b| = 5$  вычислить  $[3a - b, a - 2b]$ .
3. Векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  взаимно перпендикулярны; вектор  $\bar{c}$  образует с ними углы, равные  $\frac{\pi}{3}$ . Зная, что  $|\bar{a}| = 3$ ,  $|\bar{b}| = 5$ ,  $|\bar{c}| = 8$ , вычислить  $(\bar{a} - 2\bar{b}, \bar{b} + 3\bar{c})$ .
4. Даны два вектора  $\bar{a} = (3; -2; 6)$  и  $\bar{b} = (-2; 1; 0)$ . Найти их скалярное произведение.

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

#### ВАРИАНТ 1

##### Теоретическая часть

1. Перестановки и подстановки. Четность. Инверсия, транспозиция. Умножение подстановок. Свойства. Декремент.
2. Матрицы. Операции над матрицами. Свойства.

Задачи

1. Решить системы по формулам Крамера (если это возможно):

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

2. Вычислить ранг матрицы при помощи элементарных преобразований

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

3. Найти произведения матриц АВ и ВА (если это возможно)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Перемножить подстановки  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

**ВАРИАНТ 2**

Теоретическая часть

1. Определение определителя  $n$ -го порядка. Основные свойства.
2. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Задачи

1. Разложить подстановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и вычислить декремент.

2. Вычислить определитель по теореме Лапласа:  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ .

3. Найти подстановку  $X$  из равенства  $A X B = C$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Вычислить  $4A - 7B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

**ВАРИАНТ 3**

Теоретическая часть

1. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Вычисление ранга матрицы.
2. Обратная матрица. Условие обратимости. Формула обратной матрицы.

Задачи

1. Решить системы матричным способом 
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$
2. Найти произведение матриц  $A$  и  $B$ , если  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ .
3. Решить систему уравнений методом Гаусса: 
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 15 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -11 \end{cases}$$
4. Найти значение матричного многочлена 
$$f(A): f(x) = x^2 - 2x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

#### ВАРИАНТ 4

##### Теоретическая часть

1. Определение арифметического  $n$ -мерного векторного пространства.
2. Матричный способ решения систем линейных уравнений.

##### Задачи

1. Дана матрица  $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти присоединенную матрицу.
2. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$
3. Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$
4. Найти число решений ФСР для системы 
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

#### ВАРИАНТ 5

##### Теоретическая часть

1. Однородные системы. Свойства решений. ФСР.
2. Методы вычисления определителя

##### Задачи

1. В следующей подстановке перейти от записи в циклах к записи двумя строками:

$$(7 \ 5 \ 3 \ 1)(2 \ 4 \ 6)(8)(9).$$

2. Решить матричное уравнение  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .
3. Найти обратную для матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .
4. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}$$

## **ЗАДАЧИ**

(для решения на практических занятиях)

берутся из задачника, данного в списке основной литературы (см. §6.1 РПД)

Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. — 17-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 476 с. — ISBN 978-5-8114-9921-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/397331>

## **ТЕСТЫ**

Тесты по дисциплине «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» для проведения текущего контроля составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины и загружены в ЭИОС университета.

### **4.2 Оценочные материалы для промежуточной аттестации**

Зачет проводится по билетам. В каждом билете 2 теоретических вопроса из разных разделов математической логики и 4 задач из разных разделов дисциплины.

### **ЗАЧЕТНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Условие перпендикулярности и параллельности двух прямых.
2. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
3. Уравнение плоскости, проходящей через точку, параллельно двум заданным векторам.
4. Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
5. Смешанное произведение трех векторов. Свойства. Смешанное произведение в координатной форме. Геометрический смысл.
6. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы.
7. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
8. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса. Эксцентриситет эллипса
9. Скалярное произведение векторов. Свойства.
10. Парабола. Каноническое уравнение параболы.
11. Скалярное произведение в координатной форме. Условие коллинеарности векторов.
12. Векторное произведение векторов. Свойства. Векторное произведение в координатной форме. Геометрический смысл.
13. Определители  $n$  –го порядка. Свойства.
14. Решение систем линейных уравнений матричным способом.
15. Перестановки. Инверсия. Транспозиция.
16. Матрицы. Основные понятия, действия над матрицами.
17. Обратная матрица. Условие существования и способ вычисления.
18. Взаимное расположение двух плоскостей.
19. Системы линейных уравнений крамеровского типа. Правило Крамера.
20. Умножение матриц. Свойства.
21. Линейные операции над векторами. Свойства линейных операций.
22. Компланарные векторы. Условие компланарности. Объем пирамиды.

23. Общее уравнение прямой на плоскости. Неполные уравнения. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
24. Параметрические уравнения прямой в пространстве.
25. Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения.
26. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости.
27. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Отклонение точки от прямой.
28. Подстановки. Четность подстановки. Умножение подстановок.
29. Расстояние от точки до плоскости. Отклонение точки от плоскости.
30. Вычисление определителя  $n$ -го порядка методом разложения по элементам строки или столбца.
31. Нормальное уравнение прямой на плоскости.
32. Уравнение прямой, проходящей через две точки на плоскости.
33. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

### ЗАЧЕТНЫЕ ЗАДАЧИ

#### Тема 1. Векторная алгебра.

1. Вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  взаимно перпендикулярны; вектор  $\vec{c}$  образует с ними углы, равные  $\frac{\pi}{3}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 3$  ед,  $|\vec{b}| = 5$  ед,  $|\vec{c}| = 8$  ед, вычислить  $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{b} + 3\vec{c})$ .
2. Дано:  $|\vec{a}| = 1$  и  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\varphi = 2\pi/3$ . Найти  $||[\vec{a}, \vec{b}]||$ ,  $||[\vec{a} + 2\vec{b}, -\vec{a} + 3\vec{b}]||$ .
3. Найти координаты вектора  $x = (2, 3)$  в заданном базисе  $e_1, e_2$ , если  $e_1 = (1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 2)$
4. Разложить вектор  $\vec{a} = (5, 2, -1)$  по единичным векторам/
5. Векторы  $a$  и  $b$  образуют угол  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Зная, что  $|a| = 6$ ,  $|b| = 5$  вычислить  $[3a - b, a - 2b]$ .
6. Докажите, что векторы  $\vec{a}(10, 11, 2)$  и  $\vec{b}(10, -10, 5)$  отложенные из одной точки, можно взять в качестве ребер куба, и найдите третье ребро куба, исходящее из этой же точки.
7. Даны координаты вершин треугольной пирамиды  $SABC: A(4, 0, 1), B(5, -1, 1), C(4, 7, -5), S(7, 5, 2)$ . Найти объем пирамиды, площадь основания  $ABC$  и высоту.
8. Определить точку  $N$ , с которой совпадает конец вектора  $\vec{a} = (3; -1; 4)$ , если его начало совпадает с точкой  $M(1; 2; 3)$ .
9. Даны два вектора  $\vec{a} = (3; -2; 6)$  и  $\vec{b} = (-2; 1; 0)$ . Определить проекции на координатные оси следующих векторов: 1)  $\vec{a} + \vec{b}$ , 2)  $\vec{a} - \vec{b}$ .
10. Дано разложение вектора  $\vec{c}$  по базису  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :  $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$ . Определить разложение по этому же базису вектора  $\vec{a}$ , параллельного вектору  $\vec{c}$  и противоположного с ним направления, при условии, что  $|\vec{a}| = 75$ .

*Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: векторы и операции над ними, равные вектора, коллинеарные и компланарные вектора, скалярное, векторное и смешанное произведение векторов и их свойства, разложение вектора по базису и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 1.

## Тема 2. Прямая в $R^2$ . Прямая и плоскость в пространстве.

1. Определить угол между прямыми  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-2}$  и  $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-2}$
2. Найти нормальное уравнение плоскости  $6x - 7y + 6z - 33 = 0$ .
3. Вычислить расстояние между точками  $A(-2; -3)$  и  $B(6; 3)$ .
4. Найти координаты точки  $M$ , делящей отрезок  $AB$  в отношении  $AM:MB = -3:2$ , если  $A(-2; 1)$  и  $B(3; 6)$ .
5. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки  $A(2; 0)$ ,  $B(5; 3)$  и  $C(2; 6)$ .
6. Найти расстояние от точки  $A(4; 3; -2)$  до плоскости  $3x - y + 5z + 1 = 0$ .
7. Найти угловой коэффициент  $K$  и отрезок  $b$ , отсекаемый по оси  $Oy$  прямой  $2x - 3y = 6$ .
8. Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $A(-2; 5)$  перпендикулярно прямой  $2x - y = 0$ .
9. Вычислить угол между прямыми  $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ .
10. Составить параметрические уравнения прямой  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z}{-2}$ .

*Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: прямая на плоскости и в пространстве, различные уравнения прямой на плоскости и в пространстве, плоскость в пространстве, неполные уравнения прямой и плоскости, угол между плоскостями, угол между прямыми на плоскости и в пространстве, расстояния от точки до плоскости и до прямой и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 2.

## Тема 3. Линии второго порядка

1. Дан эллипс  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Найти фокусы эллипса,  $e$ , директрисы, большую полуось, малую полуось.
2. В параболе  $(y+3)^2 = 1/4(x-5)^2$  найти величину параметра  $p$  и координаты вершин.
3. На эллипсе  $9x^2 + 25y^2 = 3600$  найти точки, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния от левого фокуса.
4. Найти точки пересечения эллипса  $x^2 + 3y^2 = 36$  с прямой  $2x - y - 9 = 0$ .
5. Составить уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса  $144x^2 + 169y^2 = 24336$  и имеющей фокусы в вершинах этого эллипса.
6. На гиперболе  $16x^2 - 49y^2 = 784$  найти точки, которые были бы в три раза ближе к одной асимптоте, чем к другой.
7. Через точку  $A(2; 1)$  провести такую хорду параболы  $y^2 = 4x$ , которая делилась бы в данной точке пополам.
8. Дана парабола  $y^2 = 4x$ , найти точки пересечения данной параболы с прямой  $x + 3y + 9 = 0$ .
9. На эллипсе, один из фокусов которого имеет координаты  $(3; 0)$ , взята  $M(4; 2; 4)$ . Найти расстояние этой точки до соответствующей директрисы, зная, что центр эллипса совпадает с началом координат.
10. На параболе  $y^2 = 4,5x$  взята точка  $M(x, y)$ , находящаяся от директрисы на расстоянии  $d = 9,125ed$ . Вычислить расстояние от этой точки до вершины параболы.

*Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: эллипс, гипербола, парабола, эксцентриситет, фокус, асимптоты гиперболы, директрисы эллипса, поверхности второго порядка, классификация ПВП и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 3.

#### **Тема 4. Перестановки и подстановки. Определители $n$ -го порядка.**

1. Найти подстановку  $X$  из равенства  $AXB = C$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Определить число инверсий в перестановке 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.

3. Определить четность подстановки  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ .

4. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ .

5. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$ .

6. Выбрать значения  $i$  и  $k$  так, чтобы произведение  $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$  входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

7. Вычислить определитель 3-го порядка  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ b & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ .

8. Найти алгебраическое дополнение к элементу  $a_{12}$  в определителе  $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 5 & c \end{vmatrix}$ .

9. Найти  $A^{150}$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ .

10. В следующих подстановках перейти от записи в циклах к записи двумя строками:

а) (1 5)(2 3 4). б) (7 5 3 1)(2 4 6)(8)(9). в) (1 2)(3 4) ... (2n - 1 2n).

*Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: перестановка, инверсия, транспозиция, подстановка, четность подстановка, умножения

подстановок, определитель, методы вычисления определителя, минор к элементу, минор  $k$ -го порядка, алгебраическое дополнение, дополнительный минор и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 4.

### Тема 5. Алгебра матриц.

1. Найти значение матричного многочлена

$$f(A): f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить  $5A - 3B + 2C$ ,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти произведение матриц  $ABC$ , если

$$A = (1 \quad -3), \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Решить матричное уравнение  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

5. Найти обратную для матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

6. Найти обратную для матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

7. Вычислить  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$

8. Решить матричное уравнение  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

9. Найти матрицу  $A^n$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

10. Найти произведения матриц  $AB$  и  $BA$  (если это возможно)

$$A = (1 \quad -2 \quad 3 \quad 0), \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: свойства умножения, матрицы и операции над ними, свойства операций, обратная матрица, вырожденная и невырожденная матрица, базисный минор, условие существования обратной матрицы и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 5.

**Тема 6. Арифметическое векторное пространство. Исследование систем линейных уравнений.**

1. При каких значениях  $\lambda$  матрица  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$  имеет ранг равный 1.

2. Исследовать совместность  $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

3. Найти ФСР для системы  $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

4. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}$ .

5. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

6. Найти число решений ФСР для системы  $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

7. Являются ли вектора  $a_1 = (1, -2, 3)$   $a_2 = (2, -1, 4)$   $a_3 = (4, -5, 10)$  линейно зависимыми.

8. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы в любом решении совместной системы линейных уравнений  $k$ -е неизвестное было равно нулю.

9. Исследовать системы уравнений и найти общее решение в зависимости от значений, входящих в коэффициенты параметров:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + by + z = 1, \\ x + y + cz = 1. \end{cases}$$

10. Сколько баз имеет система  $k + 1$  векторов ранга  $k$ , содержащая пропорциональные векторы, отличные от нуля?

#### *Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: линейная зависимость строк, свойства линейной зависимости, ранг матрицы, методы вычисления ранга, исследования систем, условие совместности СЛУ, однородная система, свойства решения однородных систем, фундаментальная система решения (ФСР) и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 6.